Chapitre 1 : Dimensions et unités

Le cours

A Grandeurs physiques et dimensions

A.1 Qu'est-ce qu'une grandeur physique ?

Une grandeur physique est une **caractéristique physique mesurable**.

Lorsqu'on définit une grandeur physique, on lui attribue une **notation** (judicieusement choisie).

Le fait de **mesurer** une grandeur consiste à lui **attribuer une valeur**.

Ⓡ *Cela nécessite d'utiliser une **unité de mesure**, on y reviendra plus tard ...*

Exemples

Masse d'une balle : $m = 99,4$ g

Hauteur de la tour Eiffel : $H_E = 324$ m

Durée de chute de la balle depuis le sommet : $\tau_E \simeq 8$ s

Hauteur de la tour Montparnasse : $H_M = 210$ m

Durée de chute de la balle depuis le sommet : $\tau_M \simeq 6$ s

Cours

A.2 Dimension d'une grandeur

Afin de parler plus aisément de la nature physique d'une grandeur, on introduit la notion de dimension.

Définition

À chaque type de grandeur physique, on associe une **dimension** qui nous indique quelle est la nature physique de cette grandeur *(s'agit-il d'une durée, d'une distance, d'une masse, etc ?)*

Pour une grandeur donnée de symbole G, on note $[\boldsymbol{G}]$ sa dimension.

Ainsi, **deux grandeurs de même nature physique sont nécessairement même dimension**.

Exemple

Réfléchissons ...

1. Chercher l'erreur :
   (a) $H_E = 1,54\,H_M$
   (b) $H_E \geqslant H_M$
   (c) $\tau_E \geqslant \tau_M$
   (d) $\tau_E \ll H_M$
2. Idem :
   (a) $H_E + H_M$
   (b) $H_E \times H_M$
   (c) $\dfrac{\tau_E}{\tau_M}$
   (d) $\tau_E - \tau_M$
   (e) $\dfrac{H_E}{\tau_E}$
   (f) $\tau_E + H_E$

Conclusion importante !

Des grandeurs peuvent être comparées, additionnées ou soustraites entre elles **uniquement si elles sont de même dimension**.

Opérations entre dimensions

On se donne le droit :
- ❑ de multiplier ou effectuer le rapport de dimensions entre elles ;
- ❑ d'élever une dimension à une certaine puissance.

Exemple

Pour un véhicule avançant à vitesse constante v, parcourant une distance D pendant une durée τ, on sait que : $v = \dfrac{D}{\tau}$.

On pourra ainsi écrire la dimension de la vitesse : ....

A.3 Dimensions de base et dimensions dérivées

Les 7 dimensions de base

À l'heure actuelle, il suffit de définir **7 dimensions de base** pour pouvoir exprimer toute dimension de tout type de grandeur.

Le tableau ci-contre les répertorie.

ATTENTION à cette erreur classique : M **n'est pas** la dimension d'une longueur *(confusion avec l'unité mètre ...)*

Type de grandeur	Dimension associée
Longueur	
Temps	
Masse	
Intensité (électrique)	
Température	
Intensité lumineuse	
Quantité de matière	

Dimensions dérivées

Pour déterminer la dimension d'une grandeur quelconque autre qu'une des 7 dimensions de base, il faut la déduire d'une relation physique connue *(à l'aide d'une définition d'une grandeur physique ou bien d'une loi physique)*.

Exemple

À l'exemple précédent, nous avons déjà vu que l'on pouvait définir la dimension d'une vitesse sans avoir à introduire une 8ème dimension :

$$[vitesse] = L.T^{-1}$$

L et T sont ainsi deux **dimensions de base** *permettant d'exprimer la dimension d'une vitesse.*

$L.T^{-1}$ est donc une **dimension dérivée** *correspondant à la dimension d'une vitesse.*

De même, une accélération peut (dans le cas d'une accélération constante) s'exprimer comme un gain de vitesse sur une durée donnée donc :

Activité n°1

Grandeurs adimensionnées

Lorsqu'une grandeur est de dimension 1, on dit qu'elle est **adimensionnée**, ou bien sans dimension.

Par exemple, par définition, un angle α se définit comme le rapport de la longueur ℓ de l'arc de cercle intercepté par l'angle sur le rayon R du cercle.

R *Il arrive fréquemment qu'un étudiant fraichement arrivé en CPGE découvre cette définition pour la première fois de sa vie. Mieux vaut tard que jamais, mais dorénavant* ***il FAUT connaître cette définition d'un angle !***

Cours

B Homogénéité et analyse dimensionnelle

B.1 Homogénéité des relations physiques

Les relations physiques doivent TOUJOURS être homogènes : cela signifie que les deux membres de la relation doivent être de même dimension.

Si une relation n'est pas homogène, alors elle est nécessairement fausse !

L' **analyse dimensionnelle** consiste à vérifier cette homogénéité.

L'analyse dimensionnelle peut ainsi servir à ...

☞ **... éviter les erreurs de calculs**

Lors de longs calculs :

- effectuer **uniquement** des calculs littéraux **tant qu'un résultat littéral n'a pas été obtenu**
- vérifier régulièrement l'homogénéité lorsque l'analyse dimensionnelle est aisée
- **uniquement après avoir obtenu le résultat littéral final et avoir vérifier l'homogénéité**, exploiter les données numériques de l'énoncé pour effectuer l'application numérique

☞ **... et aussi à prévoir (parfois) un résultat littéral** Dans certains cas, si l'on sait qu'une grandeur G dépend d'autres grandeurs physiques pertinentes A, B, C, ..., en suivant une *loi de puissance*, alors une analyse dimensionnelle consistant à assurer l'homogénéité de la relation recherchée peut permettre de prévoir celle-ci. Ce genre d'approche impose néanmoins un sens physique aiguisé pour arriver à lister les paramètres physiques pertinents. Ce n'est pas forcément une tâche aisée ...

ACTIVITÉ N°2

B.2 Usage des fonctions mathématiques usuelles

Les fonctions mathématiques usuelles (exp, cos, sin, tan, ln, log,...) utilisées en physique représentent toujours des termes adimensionnés et doivent être appliqués à des grandeurs adimensionnées.

R *Cela provient de la manière dont sont définies ces fonctions. Par exemple, le cosinus appliqué par définition à un angle (lequel est bien adimensionné) dans un triangle rectangle est le rapport du côté adjacent sur l'hypoténuse. Donc le cosinus est sans dimension puisque le rapport de deux longueurs est bien adimensionné.*

ACTIVITÉ N°2

C Unités de mesures et applications numériques

C.1 Qu'est-ce qu'une unité de mesure ?

La physique est une science expérimentale et de ce fait nécessite d'effectuer des **mesures**. Mesurer une grandeur X signifie qu'il faut chercher à affecter une valeur à X.

Pour cela, on utilise un **instrument de mesure** permettant de comparer X à une autre grandeur physique X_{ref} de même dimension, prise comme référence et appelée **étalon**. La valeur de l'étalon, qu'on lui aura affectée arbitrairement (mais judicieusement), est l'**unité de mesure**.

Une fois que l'on dispose d'un étalon, on s'en sert pour **étalonner l'instrument de mesure** lequel permettra par la suite de mesurer X.
La mesure de X correspond alors à la valeur de la fraction $x_{\text{mes}} = \dfrac{X}{X_{\text{ref}}}$, de sorte que : $X = x_{\text{mes}} X_{ref}$ qu'on écrira plutôt sous la forme :

$$X = x_{\text{mes}} \text{ unité}$$

(R) *En réalité, il faudrait accompagner cette écriture d'une* ***incertitude*** *sur l'estimation de x. Cela fera l'objet d'un chapitre dédié à cette épineuse question ...*

Exemples

Ci-contre un des derniers mètre-étalons de Paris datant de la fin du XIXème siècle (celui-ci est situé rue de Vaugirard, en face du Sénat) permettant aux habitants de s'y référer. Il devient ainsi possible par exemple de mesurer la quantité de tissu que l'on a besoin d'acheter au marchand et d'en déduire le coût, connaissant le prix au mètre.

Au fait, comment fabriquer un mètre ruban ? Grâce à un mètre-étalon, un feutre, un compas, une règle (non-graduée) et un long ruban :
- *on trace deux marques sur le ruban tendu correspondant à la longueur de l'étalon ;*
- *puis, avec quelques talents de géomètre (de niveau collège...), il est possible de rajouter des subdivisions que l'on tracera également au feutre.*

Si on souhaite se peser, il faut pouvoir comparer sa propre masse (et non pas son poids ...) à un étalon de masse, qui sera le kilogramme. Le pèse-personne préalablement étalonné (par le fabricant) pourra me donner le rapport entre ma masse et celle d'un étalon de masse.

On utilisait encore il y a peu un étalon de platine-irridium (appelé IPK, International Prototype of the Kilogram) ayant une masse choisie comme étant exactement 1 kg. L'IPK et ses six copies sont conservés au Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) à Sèvres en banlieue parisienne enfermés dans des cloches de verre et précieusement entreposés dans un coffre fort !

Très important !

$\boxed{\textbf{TOUJOURS préciser l'unité lorsque l'on fournit un résultat numérique !}}$

En effet, la valeur numérique d'une grandeur physique n'a de sens que parce qu'elle est comparée à un étalon. Ainsi, en ne précisant pas l'unité, on ne sait pas à quel étalon on compare la grandeur calculée.

Et concernant les grandeurs adimensionnées ?

Une grandeur sans dimension peut s'écrire comme le rapport de deux grandeurs de même dimension. Ainsi, sa valeur ne dépend pas de l'étalon choisie (la valeur de celui-ci se simplifiant en haut et en bas du trait de fraction).

Une grandeur adimensionnée s'exprime sans unité.

(R) *«Et pourquoi les unités d'angles alors ? degrés ? radians ?...Parce que pourtant, un angle, c'est adimensionné, non ?» Oui, étrange hein ? On évoque ce problème un peu plus loin, patience ...*

C.2 Système international d'unités

Unités SI

En physique, nous avons depuis longtemps convenu d'un ensemble d'unités à utiliser afin de limiter les ambiguïtés et de faciliter la communication scientifique, les transactions commerciales, etc.

Il s'agit du **système SI : système international d'unités**.

Les 7 unités SI de base associées aux 7 dimensions de bases sont listées dans le tableau ci-contre.

Type de grandeur	Dimension	unité SI
Temps		
Longueur		
Masse		
Intensité (électrique)		
Température		
Intensité lumineuse		
Quantité de matière		

R *Voici les définitions exactes (non exigibles) de chacune de ces unités :*

- *Le **mètre** est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de* $\dfrac{1}{299\ 792\ 458}$ *ème de seconde.*
- *Le **kilogramme** est originellement défini comme un millième de la masse d'eau pure à* $4\,°\mathrm{C}$ *contenue dans* $1\ \mathrm{cm}^3$*, et d'un point de vue pratique, on pouvait se référer à l'IPK dont nous avons parlé précédemment. Mais depuis le 20 mai 2019, le kilogramme a pu être défini uniquement à l'aide de la seconde, de la vitesse de la lumière dans le vide et de la constante de Planck, celle-ci ayant pu être mesurée avec une excellent précision ...*
- *La **seconde** est la durée de* 9 192 631 770 *périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.*
- *L'**ampère** est l'intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de un mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force de* 2.10^{-7} *newton par mètre de longueur.*
- *Le **kelvin** est la fraction* $\dfrac{1}{273,16}$ *de la température thermodynamique du point triple de l'eau.*
- *La **candela** est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence* 540.10^{12} *hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est* $\dfrac{1}{683}$ *ème watt par stéradian.*
- *La **mole** est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12. (Lorsqu'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules.)*

Réfléchissons ...

Quelle est l'unité SI d'une vitesse ? d'une accélération ? d'une force ? d'une énergie ?

Pour ne pas avoir tout le temps à écrire $\mathrm{kg.m.s^{-2}}$ pour une force *(c'est un peu long quand même,non ? et il faut s'en souvenir en plus...)*, on introduit une nouvelle unité : le newton N, tel que 1 N = ...

De même pour l'énergie en définissant le joule J : 1 J = ...

Autres unités SI

De la même manière que pour une force, on pourra définir de nouvelles unités SI (pouvant s'exprimer à l'aide des 7 unités de bases) pour d'autres types de grandeurs physiques souvent rencontrées en physique.

La liste ci-contre **à connaître** est non-exhaustive mais suffisante en classe préparatoire.

Type de grandeur	unité SI
Force	
Énergie	
Puissance	
Tension	
Résistance	
Pression	
Champ magnétique	

Activité n°3

Intérêt du système international pour les applications numériques

Lors d'une application numérique, si on exploite toutes les données numériques en unités SI, alors on est assuré que le résultat numérique final sera également en unité SI.

Activité n°4

Cas des angles

Un angle est adimensionné et il n'existe donc rigoureusement pas d'unité d'angle ! Pourtant, quand on mesure un angle plat valant exactement π, on trouve 180 à l'aide d'un rapporteur !? Oui, bien sûr, car, pour faire simple, un rapporteur est conçu pour réaliser la bijection suivante entre la graduation lue (qui n'est pas la valeur de l'angle) et la valeur de l'angle :

$$\text{angle} = \frac{\pi}{180} \times \text{graduation lue sur le rapporteur}$$

Notez qu'il n'y a nullement besoin de parler d'unité ici ! Malheureusement, cette relation est souvent mémorisée ainsi :

$$\boxed{\text{angle en radian} = \frac{\pi}{180} \times \text{angle en degrés}}$$

laissant croire qu'il existe deux unités d'angles différentes.

Retenons que **la véritable valeur d'un angle est celle qui s'exprime en radian**.

Activité n°5

(R) *En plus des degrés, on emploie aussi parfois :*

- *les **minutes d'arc** de symbole* $'$: $60' = 1\,°$ $\Leftrightarrow$ $1' = \dfrac{1}{60}\,°$;
- *les **secondes d'arc** de symbole* $''$: $60'' = 1'$ $\Leftrightarrow$ $3600'' = 1\,°$ $\Leftrightarrow$ $1'' = \dfrac{1}{3600}\,°$.

Cours

C.3 Multiples et sous multiples d'unités

Multiples et sous-multiples à connaître par cœur !

Les sous-multiples d'unités					
10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
pico-	nano-	micro-	milli-	centi-	déci-
p	n	μ	m	c	d

Les multiples d'unités			
10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}
hecto-	kilo-	méga-	giga-
h	k	M	G

Activité n°6

(R) *Liste non-exhaustive. On pourrait rajouter aussi :*

10^{-15}	10^{1}	10^{12}	10^{15}
femto-	déca-	tera-	peta-
f	da	T	P

mais peu employés en CPGE ...

ATTENTION

Les multiples et sous-multiples d'une unité SI ne sont pas des unités SI ! !
Par exemple, le kilomètre km n'est pas l'unité SI pour les longueurs puisque l'unité SI est le mètre m.

C.4 Présentation d'un résultat numérique

a. Notion de chiffres significatifs

Les chiffres significatifs d'une valeur numérique sont les chiffres «qui signifient quelque chose», qui apportent de l'information, de la précision à la mesure de la grandeur.

Exemple

Pour une même distance, la mesure $1,012528\ \mathrm{m} = 1012528\ \mu\mathrm{m}$ *comporte 7 chiffres significatifs et est précise au micromètre alors que la mesure* $1,01\ \mathrm{m} = 101\ \mathrm{cm}$ *ne comporte que 3 chiffres significatifs et est précise au centimètre.*

Ainsi, le nombre de chiffres significatifs d'une valeur numérique est indépendant du multiple ou sous-multiple d'unité employé car cela relève d'un choix arbitraire.

Réfléchissons ...

Voici différentes mesures d'une longueur ℓ. Convertir en mm. Quel est le nombre de chiffres significatifs ainsi que la précision de la mesure ?

1. $\ell = 0,01720\ \mathrm{m}$
2. $\ell = 0,0000172\ \mathrm{km}$
3. $\ell = 1,7.10^4\ \mu\mathrm{m}$
4. $\ell = 1,7203\ \mathrm{cm}$

- Plus la valeur numérique d'une même grandeur comporte de chiffres significatifs, plus elle est précise.
- Les zéros apparaissant à l'extrême droite d'une valeur numérique sont significatifs.
- Les zéros apparaissant à l'extrême gauche d'une valeur numérique ne sont pas significatifs
  ... parce qu'ils n'apportent pas de précision sur la mesure.

b. Quelle valeur faut-il afficher à l'issue d'un calcul numérique ?

Nota Bene : *Les règles présentées ici sont très simplistes. On les applique lors d'applications numériques réalisées sans estimation d'incertitudes, autrement dit en dehors des séances de travaux pratiques. Elles ont au moins le mérite de ne pas écrire des résultats numériques dont la précision serait trop sous- ou sur-estimée.*

Cas de figure	Règle à appliquer	Exemple
Multiplication ou division	Le résultat final comporte autant de C.S. que la donnée qui en comporte le moins.	$\mathbf{3,0} \times \dfrac{34,01}{1,492} = 68,38472 = \mathbf{68}$
Addition ou soustraction	Le résultat final est aussi **précis** que la donnée la moins **précise**.	$10,23\ \text{cm} + 240\ \mu\text{m} = \mathbf{102,3\ mm} + 0,270\ \text{mm} = 102,570\ \text{mm} = \mathbf{102,6\ mm}$
Application d'une fonction usuelle (sin, cos, ln, exp, ...)	Le résultat comporte autant de C.S. que l'argument.	$\sin(\mathbf{62}°) = 0,8829 = 0,\mathbf{88}$

◗ Cas mixte

Si nous obtenons un résultat littéral comportant des sommes/soustractions, produits/quotients et/ou application de fonction(s) usuelle(s), nous devrons procéder en plusieurs étapes pour l'application numérique afin de savoir combien de chiffres significatifs il faut présenter dans le résultat final.

Exemple

Soit un ressort dont une des extrémités est fixe (attachée à une potence). Sa constante de raideur k inconnue et sa longueur à vide est $\ell_0 = 10,1$ cm. On l'étire en accrochant une masse $m = 105,7$ g pesée à la balance. On mesure alors la longueur du ressort : $\ell = 16,4$ cm. Dans cette situation d'équilibre, la norme de la du poids de la masse vérifie $mg = k(\ell - \ell_0)$ où $g = 9,81$ m.s^{-2}.

On en déduit ci-contre la valeur de k en pensant à convertir les données en unité SI. On constate qu'il faut uniquement deux chiffres significatifs dans le résultat final. (Eh oui, même si toutes les données comportaient au moins 3 C.S. ...)

*Cependant, **pour éviter toute accumulation d'arrondis numériques** qui nous amènerait à un résultat numérique un peu trop éloigné d'une valeur plus en adéquation avec la réalité, **il vaut mieux effectuer l'application numérique en une seule fois**. La calculatrice fournit alors $k = 16,459$ N.m^{-1} que l'ont doit donc approcher à deux chiffres significatifs.*

Ainsi, la valeur $k = 16$ N.m^{-1} est à préférer plutôt que 17 N.m^{-1} .

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{mg}{\ell - \ell_0} \\
&= \frac{253,0.10^{-3} \times 9,81}{16,4.10^{-2} - 10,1.10^{-2}} \\
&= \frac{1,04}{16,4.10^{-2} - 10,1.10^{-2}} \\
&= \frac{1,04}{6,3.10^{-2}} \\
&= 16,508\ \text{N.m}^{-1} \\
&= 17\ \text{N.m}^{-1}
\end{aligned}
$$

Activité n°7