

Énergie d'une explosion atomique

1] On suppose que $R(t)$ suit une loi de puissance :

$$R(t) = \alpha t^a E^b e^c$$

Cette relation doit être homogène donc :

$$[R] = [\alpha] [t]^a [E]^b [e]^c$$

$$L = 1 \cdot T^a \cdot (M \cdot L^2 \cdot T^{-2})^b \cdot (M \cdot L^{-3})^c$$

une masse volumique est homogène à une masse sur un volume et $[volume] = L^3$

$$M^0 \cdot L^1 \cdot T^0 = M^{b+c} \cdot L^{2b-3c} \cdot T^{a-2b}$$

Par identification :

$$\begin{cases} b+c = 0 \\ 2b-3c = 1 \\ a-2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ 2b + 3b = 1 \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{1}{5} \\ a = \frac{2}{5} \end{cases}$$

D'où $R(t) = \alpha t^{2/5} E^{1/5} e^{-1/5}$

2] À l'aide de l'échelle, on mesure $R = \frac{74m}{2} = 37m$ pour $t = 0,94ms$

Or $R^5 = t^2 E e^{-1}$ (en considérant $\alpha = 1$)

D'où $E = \frac{e R^5}{t^2}$

AN: $E = \frac{1,2 \times 37^5}{(994 \cdot 10^{-3})^2}$

$E = 9,4 \cdot 10^{13} J$

En multipliant par $\frac{1 \text{ tonne de TNT}}{4,2 \cdot 10^9 \text{ J}}$, on trouve :

$$E = 22 \cdot 10^3 \text{ tonnes de TNT}$$

$$E = 22 \text{ kilotonnes de TNT}$$

↳ information TOP SECRET!
mais néanmoins facilement accessible
via une simple analyse dimensionnelle
et une photographie du nuage !!!

3] Élevons R à la puissance $\frac{5}{2}$:

$$R^{5/2} = \alpha^{5/2} t E^{1/2} e^{-1/2}$$

$$R^{5/2} = \beta t \sqrt{\frac{E}{e}}$$

où β est une
constante adimensionnée

↳ Peut-on appliquer $x \rightarrow \log x$?? (appel: $\log x = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$)

Non car il faut d'abord adimensionner ! Comment faire ??

On peut noter $R_0 = 1 \text{ cm}$ (G.I. Taylor avait
estimé R en cm ...)

et $t_0 = 1 \text{ s}$

$$\text{Alors } \begin{cases} R = x_R R_0 & \text{où } x_R \text{ est la valeur de } R \\ & \text{exprimée en cm} \\ t = x_t t_0 & \text{où } x_t \text{ est la valeur de } t \\ & \text{exprimée en s} \end{cases}$$

Notons que $[x_R] = [x_t] = 1$

$$D \propto \omega^{-1} \quad x_R^{3/2} R_0^{5/2} = \beta x_t t_0 \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Autrement dit : $x_R^{3/2} = K x_t$
 une constante
 nécessairement adimensionnée

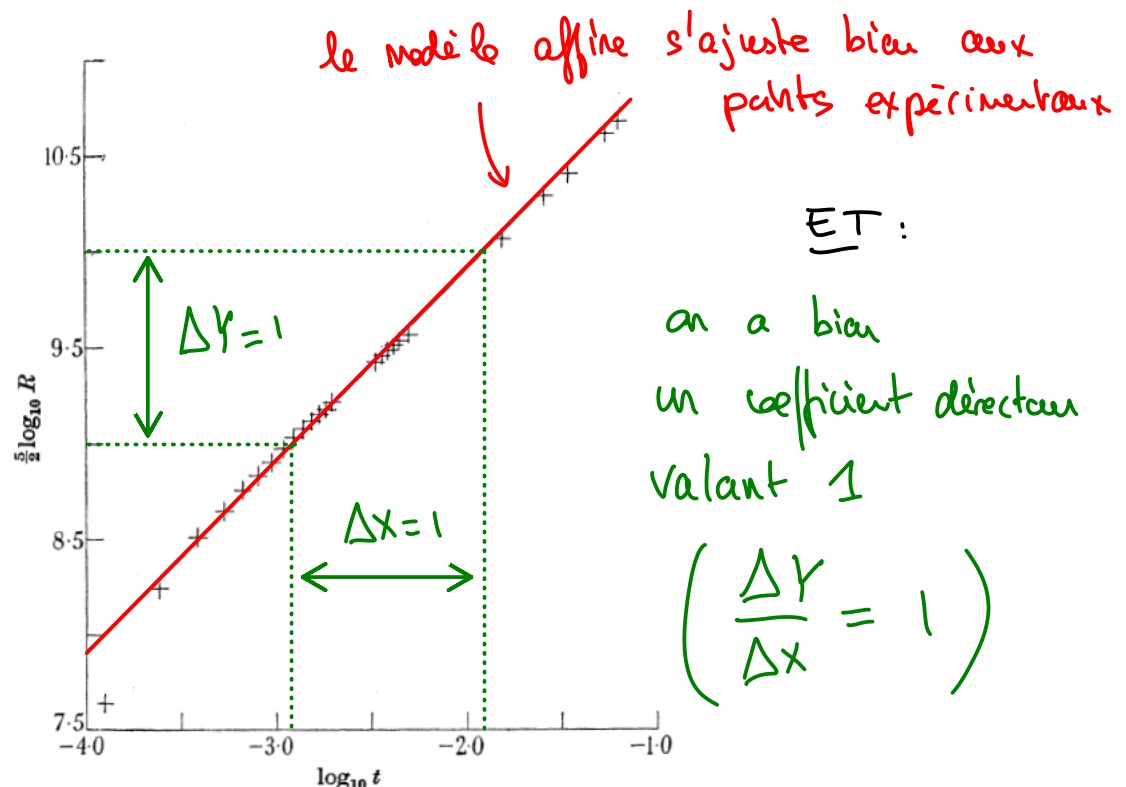
Appliquons $x \rightarrow \log(x)$:

$$\frac{3}{2} \log x_R = \log x_t + \log K$$

de la forme $Y = X + b$

Il s'agit de l'équation d'une droite de coefficient directeur 1.

⇒ Vérifions expérimentalement grâce au film déclassifié :



⇒ Cette approche graphique valide donc la relation théorique proposée par G.I. Taylor !