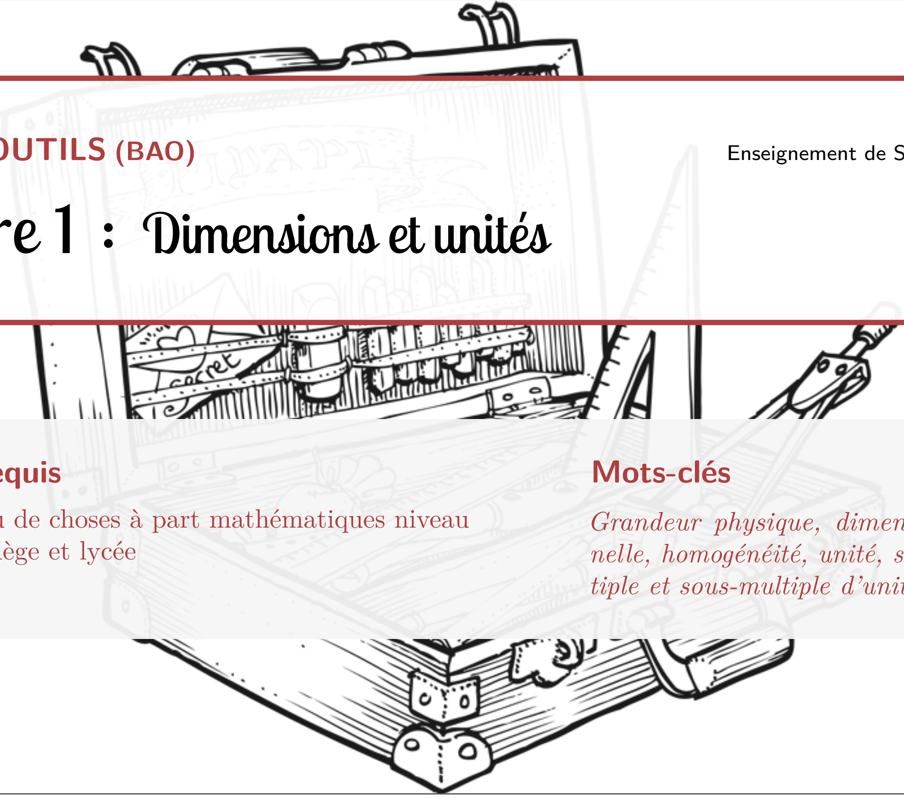


Chapitre 1 : Dimensions et unités

Prérequis

- ➤ peu de choses à part mathématiques niveau collège et lycée

Mots-clés

Grandeur physique, dimension, analyse dimensionnelle, homogénéité, unité, système international, multiple et sous-multiple d'unité

Questions de cours

A Grandeurs physiques et dimensions

1. Qu'est-ce qu'une grandeur physique ?
2. Quelles sont les 7 dimensions de base ?
3. Comment peut-on en déduire d'autres dimensions ? Donner des exemples.
4. Qu'est-ce qu'une grandeur adimensionnée ?

B Homogénéité et analyse dimensionnelle

5. Qu'entend-t-on par homogénéité d'une relation physique ?
6. À quoi faut-il faire attention lors de l'emploi de fonctions mathématiques usuelles (logarithme, cosinus, exponentielle, sinus, ...) ?

C Unités de mesures et applications numériques

7. Que représente une unité de mesure d'une grandeur donnée ? Qu'est-ce qu'un étalon ?
8. Quelle est l'unité d'une grandeur adimensionnée ?
9. Quelles sont les unités du système international associée à chacune des 7 dimensions de base ?
10. Comment peut-on en déduire d'autres unités SI ? Donner des exemples.
11. Afin d'abréger quelles sont les unités SI que l'on introduit pour des grandeurs physiques usuelles (force, énergie, puissance, tension, résistance, pression, champ magnétique) ?
12. Que dire des unités d'angles ?
13. Lister les multiples et sous-multiples que vous devez connaître en précisant la puissance de 10 correspondante (kilo, milli, etc).
14. Rappeler les règles de présentation d'un résultat numérique lorsque les estimations d'incertitudes n'ont pu être menées (faute d'information).

Act

Activités de cours

1 Déterminer la dimension d'une grandeur

Exploiter une relation physique connue faisant intervenir la grandeur physique dont on cherche la dimension. Procéder ainsi :

- par du calcul littéral, isoler la grandeur,
- puis en déduire sa dimension à l'aide de l'autre membre de la relation obtenue (connaissant la dimension des autres grandeurs intervenant).

1. Quelle est la dimension d'une force ?
2. Quelle est la dimension d'une énergie ?
3. Soit $x(t)$ l'abscisse d'un véhicule se déplaçant le long d'un axe Ox. Quelle est la dimension de la dérivée par rapport au temps, notée $\dot{x}(t)$?

2 Exploiter l'analyse dimensionnelle...

- ...pour détecter une éventuelle erreur de calcul littéral
- ...pour prédire un résultat littéral sous forme d'une loi de puissances

1. On considère un objet de masse m chutant d'une hauteur H sous l'effet de l'accélération du champ de pesanteur g. On demande la durée τ de chute. Un élève obtient le résultat littéral suivant :

$$\tau = \sqrt{\frac{mg}{2H}}$$

Montrer par une analyse dimensionnelle que ce résultat est faux.

2. On cherche une relation sous la forme : $\tau = \alpha . m^a . H^b . g^c$ où α est un coefficient numérique sans dimension. Déterminer les valeurs des exposants a, b et c.
3. **Usage de fonctions mathématiques usuelles et dimensions**
   (a) Soit un échantillon radioactif dont la quantité de matière n d'isotopes radioactifs décroît au cours du temps de manière exponentielle : $n(t) = n_0 \, e^{-t/\tau}$.
   Quelle est la dimension de n, n_0 et τ ?
   (b) Soit une masse accrochée au bout d'un ressort et pouvant ainsi osciller horizontalement le long d'un axe Ox de manière sinusoïdale : $x(t) = x_{eq} + A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.
   Quelle est la dimension de chacune des constantes x_{eq}, A, ω_0 et φ ?
   (c) En voulant établir la formule de Tsiolkovski - *gain de vitesse Δv d'une fusée de masse initiale m_0 en fonction de de la variation de masse $\Delta m < 0$ de la fusée due à l'éjection de gaz* - un étudiant obtient la relation littérale suivante : $\Delta v = \ln\left(m_0 + \dfrac{\Delta m}{m_0}\right)$. Qu'en pensez-vous ?

3 Déterminer l'unité SI d'une grandeur

Déterminer préalablement la dimension de cette grandeur puis en déduire son unité SI en exploitant celles des dimensions de base.

Quelle est l'unité SI ... :

1. ... d'une pression ?
2. ... d'un champ magnétique ? *Donnée : une charge électrique q de vitesse v plongée dans un champ de norme B est soumis à la force de Lorentz de norme $|q|vB|\sin\alpha|$, où α est l'angle entre la vitesse $\vec{v}$ et le champ magnétique $\vec{B}$*

Act

4 Effectuer des applications numériques en unité SI

Convertir les données en unités SI afin que le résultat s'exprime également dans l'unité SI correspondant à la dimension de la grandeur que l'on souhaite calculer.

La troisième loi de Kepler indique que le rayon R de l'orbite d'une planète autour du Soleil est relié à sa période de révolution T par :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

où M_S est la masse du Soleil et $G = 6,67.10^{-11}$ uSI. Pour la Terre, on donne $R = 150.10^6$ km et $T = 365,25$ jours. Que vaut la masse du Soleil ?

5 Degrés ou radians ?

La «véritable» valeur d'un angle est celle qui s'exprime en radian.

ATTENTION :

◗ Calculatrice réglée en radian

Lors de l'application de sin, cos et tan à un angle, il faudra veiller à indiquer la valeur de celui-ci en radian.
Lors de l'utilisation de arcsin, arccos et arctan, la calculatrice renverra un résultat en radian.

◗ Calculatrice réglée en degré

Lors de l'application de sin, cos et tan à un angle, il faudra veiller à indiquer la valeur de celui-ci en degré.
Lors de l'utilisation de arcsin, arccos et arctan, la calculatrice renverra un résultat en degré.

1. Considérons un arc de cercle d'angle $115°$ et de rayon $0,10$ m. Quelle est la longueur de l'arc de cercle ?
2. Un piéton dans la rue de Rennes est situé à 400 m de la tour Montparnasse.
   Sous quel angle observe-t-il la tour ?
3. Un skater se fabrique une rampe inclinée à l'aide d'une planche de $2,0$ m de long. De quelle hauteur doit-il élever une des deux extrémités de la planche pour avoir une inclinaison de $30°$ par rapport au sol ?

6 Conversion d'unité

Exploiter correctement la puissance de 10 associée à tel ou tel multiple ou sous-multiple.

1. Convertir en nm : $\lambda = 0,633\ \mu$m   Que vaut ce résultat en unité SI ?
2. Convertir en unité SI : $S = 10,0$ cm^2 et $V = 2,0$ L
3. Quelle serait une unité plus adaptée pour les grandeurs ci-dessous ?

$$W = 3,10.10^7 \text{ J} \qquad i = 0,000253 \text{ A} \qquad m = 1,24.10^4 \text{ mg ?}$$

7 Présentation d'un résultat numérique

Appliquer les règles vues en cours (paragraphe **C.4**).

1. On donne le nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,022140857.10^{23}$ mol^{-1} et la masse molaire $M = 18,01528$ g.mol^{-1} de l'eau. Quelle est la quantité de matière n d'une masse $m = 1,5$ kg d'eau ?
2. Un véhicule s'est déplacé à vitesse constante de $v = 50$ km/h pendant une durée $\Delta t = 300$ s. Quelle aura été la distance d parcourue ?
3. Soient une masse $m_1 = 2,4$ kg et $m_2 = 387$ g. Que vaut $m_1 - m_2$?

Exercices

Difficulté de l'exercice (analyse, «technicité», ...) Durée de l'exercice

Compétences travaillées	Exercices 1	2	3	4	5
Déterminer la dimension et/ou l'unité SI d'une grandeur	•	•	•		
Homogénéité d'une relation		•	•	•	•
Application numérique et conversion d'unité			•	•	•

Exercice 1 Dimensions de grandeurs usuelles

Établir la dimension et l'unité SI ...

1. ... d'une puissance *(aide : quel est le lien entre puissance et énergie ?)* ;
2. ... d'une tension électrique *(aide : quel est le lien entre puissance, tension et intensité électrique ?)* ;
3. ... d'une résistance électrique *(aide : penser à la loi d'Ohm)*.

Exercice 2 Analyse dimensionnelle

1. Un étudiant a appliqué la formule du pont diviseur de tension à un pont résistif constitué de deux résistances R_1 et R_2. Voit le résultat trouvé pour la tension aux bornes de la première résistance :
$$u_1 = \frac{R_1}{1+R_2}$$
Qu'en pensez-vous ?
2. Voici l'expression à laquelle à aboutit un étudiant concernant la réponse en intensité d'un circuit RLC série à un échelon de tension E :
$$i(t) = Ee^t\cos(2\pi t + \varphi)$$
Qu'en pensez-vous ?
3. Soit l'équation différentielle suivante où la fonction du temps $u(t)$ est homogène à une tension :
$$\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = K$$
Quelle est la dimension de τ et de K ?
4. Soit l'équation différentielle suivante où la fonction du temps $x(t)$ est homogène à une distance :
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \gamma$$
Quelle est la dimension de ω_0, Q et γ ?

Exercice 3 Pendule élastique

On note k la raideur d'un ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. Lorsque le ressort est de longueur ℓ, il exerce à chacune de ses extrémité une force de norme $F = k|\ell - \ell_0|$.

1. Quelle est la dimension de k ? Quelle est son unité SI ?
2. Lorsqu'on accroche une masse m à une extrémité du ressort, l'autre extrémité étant fixée, on peut observer des oscillations de la masse. Un étudiant établit à l'aide de la deuxième loi de Newton que la période des oscillations (sans frottements) vérifie :
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$
Cette expression vous semble-t-elle correcte ? Sinon, quelle erreur a pu être commise ?
3. L'étudiant mesure $T = 396$ ms pour une masse $m = 100$ g. En déduire la valeur de k.

Exercice 4 Pendule simple

Un étudiant, voulant mesurer l'intensité du champ de pesanteur g, utilise un pendule simple dont le fil est inextensible et de longueur ℓ et au bout duquel est accrochée une masse m. On note T la période du pendule.

1. Proposer une relation permettant d'exprimer T en fonction des autres paramètres physiques cités et d'un coefficient α sans dimension. On cherchera cette expression sous la forme :

$$T = \alpha \ell^a m^b g^c$$

où a, b, et c sont des exposants réels constants.

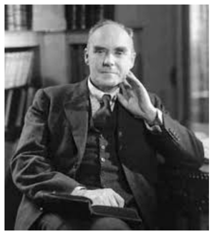
2. Pour vérifier si la relation proposée est en adéquation avec la réalité, il effectue la mesure de T pour différentes longueurs ℓ sans changer la masse m. Comment peut-il exploiter ces mesures graphiquement ?

ℓ (cm)	20	30	40	50	60	70	80
T (s)	0,93	1,06	1,28	1,38	1,57	1,65	1,79

Conclure.

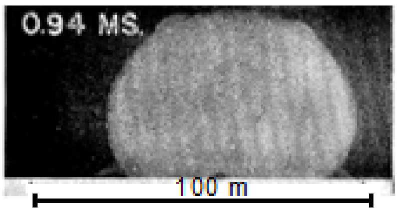
Exercice 5 Énergie d'une explosion atomique

On raconte que le physicien britannique Geoffrey Ingram Taylor aurait pu en 1950 estimer l'énergie E dégagée par une explosion nucléaire simplement en observant un film d'une essai nucléaire que l'armée américaine avait choisi de déclassifier sans se douter qu'il était possible de remonter à une telle information (information pourtant classée top secret). Il avait procédé à une analyse dimensionnelle pour trouver une loi de puissance entre le rayon $R(t)$ du nuage après l'explosion à un instant t, l'énergie E de l'explosion et la masse volumique ρ de l'air supposée constante.



1. Effectuer cette analyse dimensionnelle permettant d'exprimer $R(t)$ en fonction des grandeurs d'intérêt.

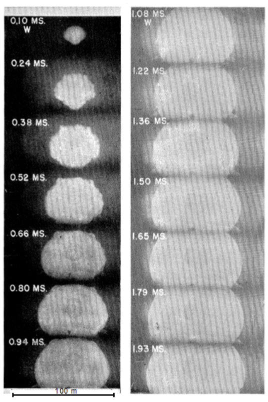
2. Ci-dessous, une image extraite du film que l'armée américaine a déclassifié en 1949, au bout d'une durée de $0,94$ ms après le début de l'explosion.

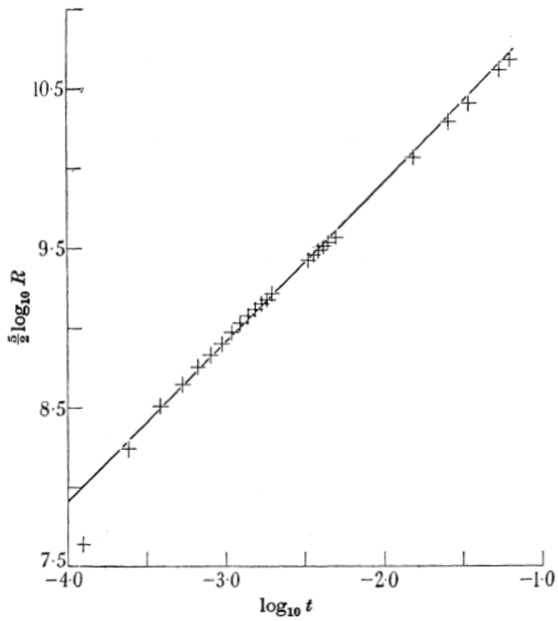


En prenant $\rho = 1,2$ kg.m^{-3}, quelle estimation de E peut-on proposer ? Exprimer le résultat équivalent en tonnes de TNT (1 tonne de TNT fournit $4,2$ GJ).

3. Ci-contre à gauche une partie du film .

Commenter le graphique ci-contre à droite publié par G.I. Taylor dans son article du 22 mars 1950 (*The formation of a blast wave by a very intense explosion. - II. The atomic explosion of 1945*).





N. Gaudouen

Ex

Aides et éléments de correction

Exercice 1

1. puissance $= \dfrac{\text{quantité d'énergie transférée}}{\text{durée du transfert}}$. Se servir de l'expression de l'énergie cinétique d'un corps en translation pour déterminer la dimension d'une énergie. En déduire celle d'une puissance.
2. puissance = tension × intensité pour un dipôle électrique. En déduire la dimension d'une tension en utilisant le résultat précédent.
3. tension = résistance × intensité pour un conducteur ohmique. En déduire la dimension d'une résistance en utilisant le résultat précédent.

Exercice 3

1. Isoler k dans l'expression de F. En déduire la dimension de k puis l'unité SI de k. Celle trouvée ne sera pourtant pas très commode. Chercher alors plutôt à exprimer l'unité SI de k en se servant du newton N...
2. La relation est-elle homogène ? Vérifier.
3. Isoler k pour en fournir une expression littérale. Puis, effectuer l'application numérique en convertissant les données en unité SI. Dans ce cas, le résultat numérique trouvé pour k s'exprime nécessairement en unité SI (celle déterminée à la question 1).

Exercice 4

La période T d'un pendule est la durée nécessaire pour que celui-ci effectue une seule oscillation. Attention à ne pas confondre cette notation T (affectée à une grandeur physique) et la notation T désignant la dimension d'une durée. Ainsi, il est tout à fait possible d'écrire : $[T] = \mathrm{T}$.

1. La relation doit être homogène. Établir alors un système de 3 équations vérifiées par les inconnues a, b et c pour assurer l'homogénéité. Résoudre ce système et donner ainsi l'expression littérale de T en remplaçant a, b et c par leurs valeurs respectives.
2. D'après l'expression littérale trouvée, que faut-il représenter en abscisse et en ordonnée pour se ramener au tracé d'une droite ? (équation de la forme : $Y = AX + B$; quelle serait l'ordonnée à l'origine B, la pente A, l'abscisse X et l'ordonnée Y ? ...) À partir des points expérimentaux, effectuer ce tracé sur une calculatrice graphique par exemple : les points semblent-ils s'aligner suivant une droite ? Effectuer la régression linéaire (à la calculatrice par exemple)...

Exercice 5

1. Loi de puissance de la forme $R(t) = \alpha\, t^a E^b \rho^c$ où α est une constante adimensionnée. Déterminer les exposants a, b et c de sorte que la relation soit homogène.
2. Mesurer R. Isoler E dans l'expression précédente et effectuer l'application numérique. Pour ce calcul d'ordre de grandeur, on pourra se contenter d'un coefficient adimensionné α égal à 1.
3. Exprimer $\log R$ en fonction de $\log t$. Que remarquez-vous ? Vérifier graphiquement.