

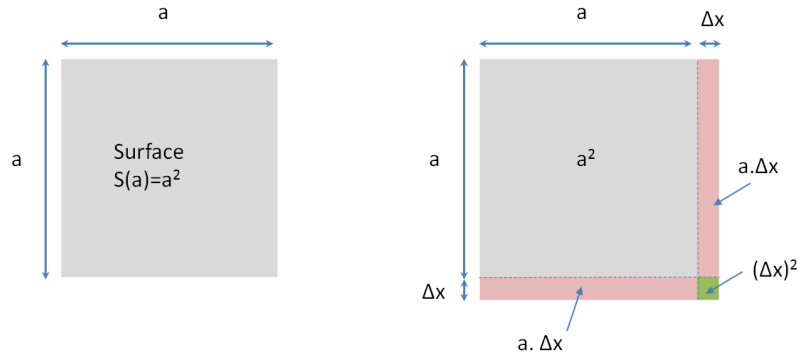


Aides et éléments de correction

Application n°1

1. On a :

$$\begin{aligned}\Delta S &= S(a + \Delta x) - S(a) \\ &= (a + \Delta x)^2 - a^2 \\ &= 2a\Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

Ci-dessous, à droite est représenté le cas $x = a$ et à gauche le cas $x = a + \Delta x$:

On constate effectivement que le carré a gagné en surface deux fois la quantité $a\Delta x$ et une plus petite quantité $(\Delta x)^2$.

2. Comme Δx est supposé petit devant a , $(\Delta x)^2 \ll 2a\Delta x$. Cela peut également se constater sur le schéma ci-dessus.

Ainsi, dans l'expression de ΔS , on peut écrire en approximation :

$$\Delta S \simeq 2a\Delta x$$

3. Sachant que $S'(x) = 2x$, on peut écrire en approximation :

$$\begin{aligned}\Delta S &\simeq S'(a)\Delta x \\ &\simeq 2a\Delta x\end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat !

Application n°2

1. $\dot{u}(t) = -\frac{E}{\tau}e^{-t/\tau}$

2. $\frac{d\dot{z}^2}{dt}$ est une dérivée de la forme $(u^2)' = 2u'u$, d'où : $\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}m2\dot{z}\dot{z} + mg\dot{z} = \dot{z}(m\ddot{z} + mg)$. Comme E_m est constante pour un mouvement de chute libre sans frottement, $\frac{dE_m}{dt} = 0$, on en déduit $\ddot{z} = -g$, ce qui est ni plus ni moins que la 2ème loi de Newton projetée suivant $\vec{u}_z$! Étonnant, non ? Pas tant que ça, voir chapitre M3 ...

3. $\frac{d\cos\varphi(t)}{dt}$ est de la forme $(\cos u)' = -u'\sin u$, d'où $\dot{s}(t) = -A\dot{\varphi}\sin\varphi(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

Voici une autre manière de voir les choses avec les dérivées composées :

$$\begin{aligned}\dot{s}(t) &= -A\frac{d\cos\varphi}{dt} \\ &= -A\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\cos\varphi}{d\varphi} \\ &= -A\omega\sin\varphi \\ &= -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)\end{aligned}$$

Il s'agit bien du même résultat.

Application n°3

Il faut minimiser la durée de parcours τ à l'aide d'une valeur adéquate de x . Il faut donc résoudre l'équation $\frac{d\tau}{dx} = 0$ d'inconnue x .

Exprimons τ :

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{AI}{v_p} + \frac{IB}{v_m} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_p} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_m}\end{aligned}$$

Rappelons que $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, d'où, après simplification : $\frac{d\tau}{dx} = \frac{x}{v_p AI} - \frac{d-x}{v_m IB}$. Ainsi, pour minimiser τ , il faut :

$$\begin{aligned}\frac{x}{v_p AI} &= \frac{d-x}{v_m IB} \\ \frac{1}{v_p} \sin i_p &= \frac{1}{v_m} \sin i_m\end{aligned}$$

où i_p et i_m sont les angles des deux trajectoires rectilignes par rapport à la normale à l'interface plage/mer au point I . À un facteur c près, on reconnaît un résultat formellement identique à la loi de la réfraction de Snell-Descartes en optique ! Pour se propager d'un point A à un point B en traversant un dioptré, la lumière emprunte le chemin prenant le moins de temps. S'informer sur **principe de Fermat** en optique (hors programme) si on veut en savoir plus ...).