**BOÎTE À OUTILS (BAO)**



# Chapitre 2 : Dérivées et différentielles en physique

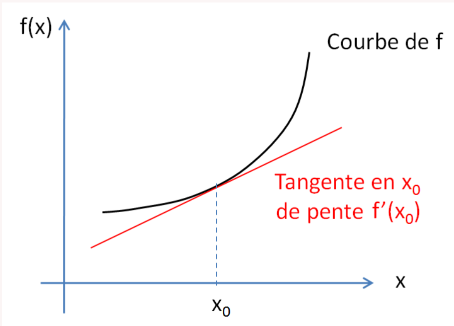
## 1 Rappel : dérivée et tangente

*Il s'agit ici de rappels de ce qui a pu être vu en enseignement de mathématiques au lycée.*

### Définition

Soit une fonction $f$ de $x$, dérivable. La dérivée $f'$ en $x = x_0$ est :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left( \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)}$$




### Interprétation graphique

$f'(x_0)$ représente ainsi la pente de la tangente à la courbe de $f$ en $x = x_0$.

L'équation de la tangente en $x = x_0$ est : $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

### Cas particulier d'une fonction affine

Dans le cas d'une fonction affine $f(x) = ax + b$, il n'est pas nécessaire de passer à la limite $h \to 0$ car le taux de variation est indépendant de $x$ et prend la valeur constante $a$. Autrement dit, **pour une fonction affine, la dérivée est égale au taux de variation**.

R *L'équation de la droite tangente rappelée ci-dessus se retrouve alors simplement en sachant que le coefficient directeur $f'(x_0)$ de la tangente est égal aux taux de variation exprimé entre $x_0$ et $x$ :*

$$\frac{t(x) - t(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \textit{avec } t(x_0) = f(x_0)$$

## 2 Comment exprimer la petite variation d'une grandeur physique ?

Soient deux **grandeurs physiques** $y$ et $x$ vérifiant la relation : $y = f(x)$ .

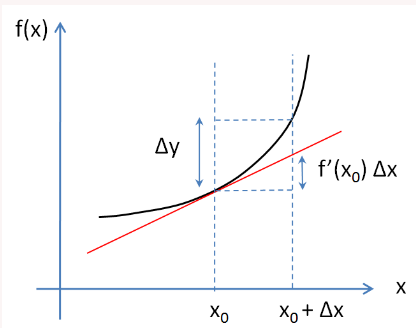
**NB :** A priori, il faut bien faire la distinction suivante : $f$ est une fonction mathématique, alors que $y$ est une grandeur physique. Mais dans un souci de clarté au détriment de la rigueur mathématique, **il nous arrivera d'écrire $y = y(x)$** (on assimile $f$ à $y$ autrement dit).

### Comment évaluer $\Delta y$ lorsque $x$ passe de la valeur $x_0$ à $x_0 + \Delta x$ ?

Pour estimer la variation $\Delta y$, il suffirait bien sûr d'écrire $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Mais lorsque la variation $\Delta x$ est très faible, il semble que la variation $\Delta y$ soit très similaire à la variation d'ordonnée pour la tangente locale en $x_0$, pour une même variation d'abscisse $\Delta x$.

Or, d'après l'encadré précédent, la variation d'ordonnée pour la tangente peut s'écrire : $f'(x_0)\Delta x$.




Si $\Delta x$ est suffisamment petit, la variation de $y = f(x)$ au voisinage de $x_0$ peut s'écrire : $\Delta y \simeq f'(x_0)\Delta x$.

R *Bien sûr, l'égalité n'est pas parfaite (voir graphique ci-dessus), mais on sent bien que plus $\Delta x$ sera faible, plus cette approximation sera bonne.*

## 3 Différentielle d'une fonction

### Définition de la différentielle

La différentielle $\mathrm{d}f$ de la fonction $f$ au voisinage de $x_0$ est définie par :

$$\boxed{\mathrm{d}f_{[x_0]} : \Delta x \to f'(x_0)\Delta x}$$

*Ainsi, si $\Delta x$ est très faible, d'après l'encadré précédent :* $\Delta y \simeq \mathrm{d}f_{[x_0]}(\Delta x)$

### Allègement des notations

Afin d'alléger l'écriture, on notera :

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}f_{[x_0]}(\Delta x)$$

Mais il ne faut pas perdre de vue que la différentielle est définie au voisinage d'une valeur de $x_0$ et pour une petite variation $\Delta x$ de celle-ci.

Pire ! <u>Souvent nous écrirons</u> : $y = y(x) = f(x)$ et donc $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f$.

R *Cette confusion volontaire permettant de clarifier les calculs littéraux peut paraître déroutante car $y$ est une grandeur physique mesurable dans une situation physique concrète alors que $f$ une fonction mathématique dont le rôle est «simplement» d'associer à un nombre un autre nombre ...*

### Cas particulier de la fonction identité

Dans le cas où $f(x)$ est la fonction identité $I_d(x)$ : $I_d : x \to x$ , on a : $I_d'(x) = 1$.

Donc, d'après ce qui précède : $\mathrm{d}I_d = \Delta x$

**Ici, l'égalité rigoureuse est justifiée**. Il ne s'agit plus d'une approximation.

En pratique, lorsque $x$ est la variable par rapport à laquelle on dérive, on note volontairement : $\mathrm{d}I_d = \mathrm{d}x$.

Alors : $\mathrm{d}x = \Delta x$

### Que retenir de tout cela ?

**Variation infinitésimale d'une grandeur**

Pour une variation infinitésimale $\mathrm{d}x$, la variation infinitésimale de $y = f(x)$ au voisinage de $x_0$ est :

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$$

le qualificatif ***infinitésimal*** signifiant que cette égalité est justifiée lorsque les variations considérées sont très petites et tendent vers 0.

**Application n°1**

Soit un carré de côté $x$, et de surface $S(x) = x^2$.

1. Si $x$ passe de la valeur $a$ à la valeur $a + \Delta x$ (avec $\Delta x > 0$), exprimer précisément la variation de surface $\Delta S = S(a + \Delta x) - S(a)$. Proposer une interprétation géométrique.
2. Que devient ce résultat lorsqu'on remplace la variation $\Delta x$ par une variation infinitésimale $\mathrm{d}x$ telle $|\mathrm{d}x| \ll a$ ?
3. Retrouver le résultat précédent à l'aide de l'encadré 3.

Cours

# 4 Notation de la dérivée en physique

### Usage de la notation différentielle

D'après ce qui précède, lorsque $y(x) = f(x)$, nous avons vu qu'au voisinage de $x_0$ :

$$f'(x_0)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}f \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Ainsi, **désormais, la notation $f'$ pour la dérivée de $f$ est à <u>BANNIR</u> !** Écrire $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ est certes plus long à écrire que $f'$ mais cela a le mérite de préciser par rapport à quelle variable on dérive la grandeur $y$ (ici, $x$).

De plus, elle permet de savoir quelle est la dimension de $f'$ : $\quad [f'] = \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{[y]}{[x]}$

Cela sera utile lorsqu'on souhaitera vérifier l'homogénéité des relations mathématiques obtenues dans les problèmes (voir chapitre **BAO1**).

Afin d'être plus précis dans la notation et quand cela est nécessaire, on pourra rappeler que ces différentielles sont évaluées au voisinage de $x = x_0$ de la manière suivante :

$$f'(x_0) = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}$$

que l'on pourra aussi noter $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}$ dans le cas où $y = f(x)$.

**Notation différentielle de la dérivée en physique**

**On retiendra ceci :**

- La dérivée de $y = f(x)$ par rapport à $x$ devra être notée $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
- D'après les résultats obtenus auparavant, lorsque $y = f(x)$, la variation infinitésimale de $y$ lorsque $x$ varie d'une quantité infinitésimale $\mathrm{d}x$ au voisinage de $x_0$ peut s'écrire :

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0} \mathrm{d}x$$

### Cas particulier d'une dérivée constante

Si $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \textit{constante}$, on sait que $y$ est une fonction affine de $x$, et que la dérivée est égale au taux d'accroissement entre $x_0$ et $x_0 + \Delta x$ avec $x_0$ et $\Delta x$ quelconques. D'où :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\text{ , dans le cas d'une dérivée constante}}$$

### Dérivée seconde

Pour calculer la dérivée seconde de $y = f(x)$, il faut appliquer deux fois successivement l'opérateur dérivée $\frac{\mathrm{d}\,\cdot}{\mathrm{d}x}$, la dérivée seconde s'écrira donc : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$.

On adoptera une manière plus compacte de l'écrire : $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}}$

Le «$\mathrm{d}^2$» devant $y$ permet de préciser qu'il s'agit bien d'une dérivée seconde. Le «$\mathrm{d}x^2$» permet de garder en tête que le dénominateur aura la dimension de $x$ élevée au carré. Cela sera donc très pratique lorsque l'on aura à effectuer des analyses dimensionnelles dans le cas où $y = f(x)$ : $\left[\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right] = \frac{[y]}{[x]^2}$

Cours

### ◗ Dérivée d'ordre n

On généralise l'écriture précédente à la dérivée d'ordre $n$ : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}}$

L'analyse dimensionnelle mènera alors à : $\left[\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right] = \dfrac{[y]}{[x]^n}$ .

### ◗ Notation des dérivées temporelles

Très souvent en physique, on dérive par rapport à la variable de temps $t$.

Ainsi, pour une fonction $y = f(t)$ , on notera souvent : $\boxed{\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$ que l'on prononce «*y point*».

(R) ***ATTENTION*** *par contre, **on n'utilisera pas** cette notation pointée de la dérivée pour des grandeurs notées i ou j (pour des intensités électriques typiquement...), étant donné qu'il y a déjà un point sur ces lettres ! Cela risquerait d'entraîner de grosses confusions ... Il faudra donc se forcer à écrire* $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ *et* $\dfrac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t}$ *, au lieu de* $\dot{i}$ *et* $\dot{j}$.

Pour les dérivées temporelles d'ordre 2, on notera : $\boxed{\ddot{y} = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}}$ que l'on prononce «*y deux points*».

### ◗ Dérivée des fonctions composées

Si $y = y(x)$ et $x = x(t)$, alors pour $f = y \circ x$ qui est une fonction composée de la variable $t$, d'après vos connaissances de lycée en mathématiques, on devrait pouvoir écrire :

$$f' = (y' \circ x) \times x'$$

Mais en physique, nous devons utiliser la notation différentielle et celle-ci permettra justement de faciliter le calcul de ce type de dérivée. Puisque $f(t) = y(x(t))$, l'égalité ci-dessus peut se traduire ainsi avec la notation différentielle :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} . \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

(R) *Cette dernière ligne doit vous paraître naturelle, car nous avons vu que nous pouvions manipuler* $\mathrm{d}x$ *comme un nombre : dans le membre de droite, si on «simplifie» par* $\mathrm{d}x$*, on retrouve bien l'égalité avec le membre de gauche. C'est pourquoi on se souvient assez facilement de cette égalité.*

## Application n°2

Exprimer les dérivées par rapport au temps des grandeurs suivantes :

1. $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ où $E$ et $\tau$ sont des constantes (tension d'un condensateur lors d'une charge) ;
2. $E_m = \dfrac{1}{2} m \dot{z}^2 + mgz$ (énergie mécanique d'un corps de masse $m$, d'altitude $z$ en chute libre dans le champ de pesanteur terrestre).
3. $s(t) = A\cos[\varphi(t)]$ avec $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ , où $A$, $\omega$ et $\varphi$ sont des constantes (il s'agit d'un signal sinusoïdal...).

## Application n°3

Un vacancier est en train de se noyer en mer au point $B$. Cela n'a pas échappé au sauveteur en $A$ grâce à ses jumelles. Celui-ci s'élance en courant à vitesse constante $v_p$ sur la plage. Puis, après avoir atteint l'eau en $I$, il nage à vitesse constante $v_m$ dans la mer jusqu'à atteindre et secourir le malheureux.

Que doit vérifier $x$ pour que le sauveteur arrive le plus rapidement possible auprès du vacancier ?