Chapitre 3 : Les intégrales en physique

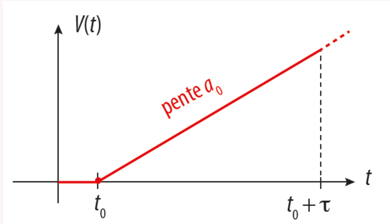
1 Un exemple concret

Pour illustrer la notion d'intégrale et son interprétation en physique, prenons un exemple simple.

Position du problème

On considère une voiture avançant en ligne droite sur un axe Ox avec une accélération constante $\ddot{x}(t) = a_0 > 0$. À l'instant initial $t = t_0$, elle possède une vitesse nulle. Ainsi, en intégrant $\ddot{x}(t)$ entre t_0 et t quelconque, on obtient l'expression de la vitesse $\dot{x}(t) = v(t)$ qui évolue de manière affine avec le temps :

$$v(t) = a_0(t - t_0)$$

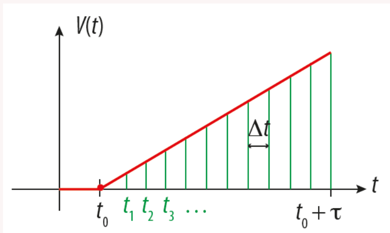


On se demande **quelle est la distance ℓ parcourue au bout d'une durée τ ?**

(R) *Si la voiture avançait à vitesse constante v_0, la réponse serait simple : $D = v_0\tau$. Mais justement,* ***la vitesse n'est pas constante*** *ici, on ne peut donc pas utiliser cette relation.*

Discrétisation du temps

Nous allons «fractionner» ce problème en N problèmes plus simples (N étant un nombre entier). Dans un premier temps on découpe le parcours total en N petit parcours de durée $\Delta t = \dfrac{\tau}{N}$ chacun.

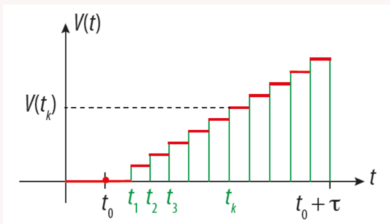


On définit alors les instants : $t_k = t_0 + k\Delta t$, où k est un entier compris entre 1 et N.

Approximation par une fonction «escalier»

On peut ensuite estimer ℓ approximativement. Pour cela on considère qu'entre t_{k-1} et t_k , la vitesse reste constante et vaut $v(t_{k-1})$
Alors, la durée ℓ_k parcourue sur l'intervalle $[t_{k-1}; t_k]$ est :

$$\ell_k = v(t_{k-1}).\Delta t$$

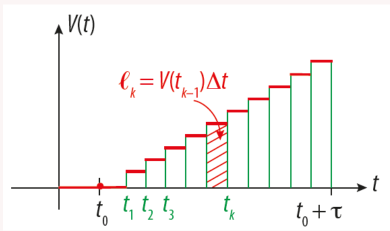


Par cette méthode, on en déduit approximativement la distance totale : $\ell \simeq \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \ell_k$.

D'où : $$\ell \simeq \sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t$$

Une première interprétation géométrique

Dans la représentation graphique de la vitesse en fonction du temps, le terme $v(t_{k-1}).\Delta t$ représente l'aire d'un rectangle de «largeur» Δt et de «longueur» $v(t_{k-1})$ (utilisons des guillemets ici, car bien entendu, ces termes ne sont pas homogènes à des longueurs).



Effectuer la somme $\ell \simeq \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \ell_k = \sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t$ revient donc à calculer la **somme des aires** de chaque rectangle sous la courbe de $v(t)$. Cela correspond donc quasiment à l'aire sous la courbe de $v(t)$ entre t_0 et $t_0 + \tau$.

Passage à la limite $\Delta t \to 0$

Dans le paragraphe précédent, nous avons donc approximé la fonction $v(t)$ par une fonction en escalier. Bien sûr, on se doute que cette approximation en escalier sera d'autant meilleure qu'il y aura de marches sur l'escalier. Ce qui revient à dire qu'elle sera d'autant meilleure que N est grand et donc que l'incrément de temps Δt est faible.

Pour tendre vers la valeur exacte de ℓ recherchée, il faut donc **passer à la limite** $N \to \infty$ et donc $\boldsymbol{\Delta t \to 0}$:

$$\ell = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t \right)$$

Ce qu'on vient d'écrire n'est ni plus ni moins que l'intégrale de la fonction $v(t)$ entre $t = t_0$ et $t = t_0 + \tau$:

$$\ell = \int_{t_0}^{t_0+\tau} v(t)\mathrm{d}t$$

Interprétation géométrique de l'intégrale

En passant à la limite $\Delta t \to 0$ et $N \to \infty$, ℓ tend à devenir *exactement* l'aire sous la courbe de la fonction $v(t)$ (non-approximée par une fonction escalier) entre t_0 et $t_0 + \tau$.

Notion de somme continue de contributions élémentaires

En passant à la limite, on a ainsi «transformé» la somme discrète des contributions ℓ_k en une **somme continue et infinie de contributions élémentaires** $\boldsymbol{\delta\ell = v(t)\mathrm{d}t}$, où $\mathrm{d}t$ représente une variation infinitésimale du temps :

$$\ell = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \delta\ell = \int_{t_0}^{t_0+\tau} v(t)\mathrm{d}t$$

R *Ce n'est pas un hasard si le symbole* $\int$ *ressemble à un «S». En effet, cela correspond aussi à la première lettre du mot «somme» ...*

R *Dans l'exemple choisi, par la suite, il n'y aurait plus qu'à terminer le calcul intégral, sachant* $v(t) = a_0(t - t_0)$ *:*

$$\ell = \int_{t_0}^{t_0+\tau} a_0(t - t_0)\mathrm{d}t = a_0 \left[\frac{t^2}{2} - t_0 t\right]_{t_0}^{t_0+\tau} = \frac{a_0\tau^2}{2}$$

Si on connaît la valeur de a_0 *et* τ*, il n'y aurait plus qu'à faire l'application numérique...*

2 Généralisation

Lorsque le calcul d'une grandeur G peut se décomposer en une somme de contributions :

1. Exprimer la contribution élémentaire δG que l'on peut associer à la grandeur G en fonction de la variation infinitésimale $\mathrm{d}x$ de la variable x du problème

On mettra ainsi en évidence l'existence d'une fonction $f(x)$ telle que :

$$\boldsymbol{\delta G = f(x)\mathrm{d}x}$$

2. Exprimer G comme la somme continue des contributions élémentaires δG

$$\boldsymbol{G = \int_{x_1}^{x_2} \delta G} \qquad \text{d'où} \qquad \boldsymbol{G = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

3. Faire le calcul de l'intégrale

On connaît l'expression de $f(x)$, il reste donc à trouver une primitive et finir le calcul ...

Cours

3 Les symboles d, δ et Δ

Il sera <u>CRUCIAL</u> de bien comprendre la différence entre ces trois symboles. D'une part, parce qu'ils sont très largement utilisés en physique. D'autre part, parce que **leur mauvaise compréhension entraîne des blocages profonds dans l'assimilation de certaines définitions, dans la compréhension et la formulation des raisonnements physiques menés, etc.**

- **Le symbole «d» permet de désigner une <u>variation</u> infinitésimale** d'une grandeur lorsque la variable temporelle et/ou les variables spatiales varient elles-mêmes de manière infinitésimales.
- **Le symbole «δ» sert à désigner une <u>quantité</u> infinitésimale**.
- **Le symbole «Δ»** sert à exprimer le **<u>bilan</u>** d'une grandeur, c'est-à-dire une variation **globale** de cette grandeur, c.à.d. lorsque la variable de temps et/ou les variables d'espace ont varié significativement *(càd, de manière non-infinitésimale)*.

(R) *Le terme* «global» *s'oppose donc à* «infinitésimal».

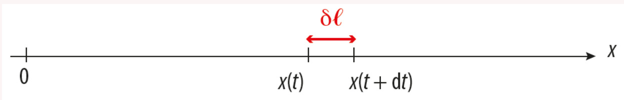
Par exemple, revenons au véhicule qui se déplace en ligne droite. On peut définir la position $x(t)$ du véhicule le long d'un axe Ox à un instant t quelconque.

Concrètement, si le véhicule s'est déplacé pendant une durée infinitésimale dt sur une très petite distance, disons 1 millimètre *(très petit à l'échelle des quelques centaines de mètres que doit parcourir le véhicule)* , alors il s'est déplacé d'une <u>quantité infinitésimale de longueur $\delta\ell$</u> = 1 mm.

Ce déplacement infinitésimal a engendré <u>une variation infinitésimale de la grandeur $x(t)$</u> qui est passée de la position $x(t) = 100,000$ m à la position $x(t + \mathrm{d}t) = 100,001$ m. Ainsi, nous pourrons écrire :

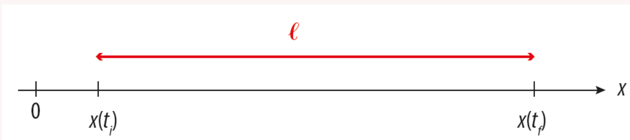
$$\mathrm{d}x = 100,001 \text{ m} - 100,000 \text{ m} = 1 \text{ mm}$$

Soit : $\boxed{\mathrm{d}x = \delta\ell}$



Concernant le symbole «Δ» , si le véhicule s'est déplacé pendant une durée $\Delta t = t_f - t_i$ entre deux instants t_i et t_f, alors nous pouvons écrire la variation globale d'abscisse Δx sur l'ensemble du parcours ainsi :

$$\Delta x = x(t_f) - x(t_i)$$



Bien sûr, cela représente la distance totale parcourue ℓ , donc : $\boxed{\Delta x = \ell}$! !

Ainsi, nous pouvons donc utiliser le symbole «Δ» pour $x(t)$, mais nous n'écrirons **<u>surtout pas</u>** «$\Delta\ell$» ! ! ! Cela n'aurait aucun sens ! !

Ainsi, une autre manière de voir les choses serait de dire que :

la notation «$\mathrm{d}x = \delta\ell$» correspond à l'*expression infinitésimale* de la notation «$\Delta x = \ell$».

Ou encore :

$$\boxed{\ell = \int \delta\ell \qquad \text{alors que :} \qquad \Delta x = \int \mathrm{d}x}$$

Cours

Application n°1 — Aire d'un disque et volume d'une sphère

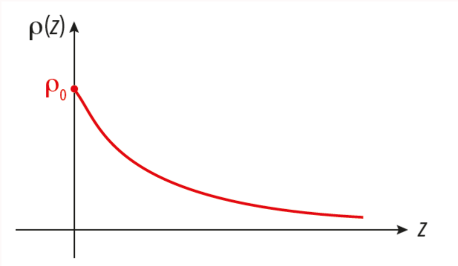
1. Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ d'un disque de rayon R. Pour cela, on pourra imaginer que le disque est constitué d'un ensemble de couronnes circulaires de rayon r de largeur infinitésimale $\mathrm{d}r$.
2. On admet que l'aire d'une sphère de rayon r vaut $4\pi r^2$.
   En déduire le volume $\mathcal{V}$ d'une sphère de rayon R.

Application n°2 — Masse de l'atmosphère

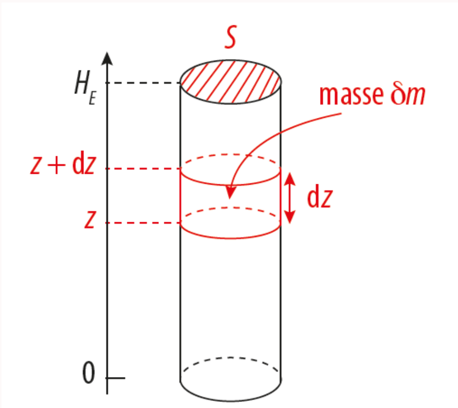
Proche du sol terrestre, la masse volumique de l'atmosphère peut s'écrire en fonction de l'altitude z :

$$\rho(z) = \rho_0 e^{\frac{-Mgz}{RT}}$$

où $M = 29\ \mathrm{g.mol^{-1}}$ est la masse molaire de l'air, $g = 9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}$ et $R = 8,314\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$ est la constante des gaz parfaits. $\rho_0 = 1,18\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ est la masse volumique au niveau du sol et $T = 300\ \mathrm{K}$ est la température de l'air ambiant supposée constante.



On cherche à déterminer la masse m d'une colonne d'air cylindrique de surface de base $S = 1,0\ \mathrm{m^2}$ sur une hauteur $H_E = 324\ \mathrm{m}$ égale à la taille de la tour Eiffel.



1. Comment s'écrit la quantité élémentaire de masse δm comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$?
2. En déduire la masse contenue dans le cylindre.