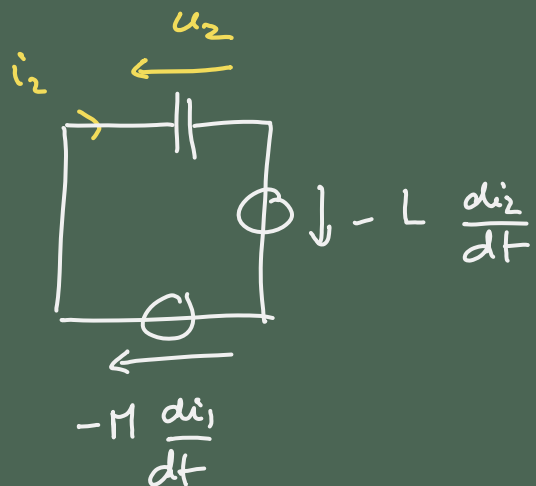
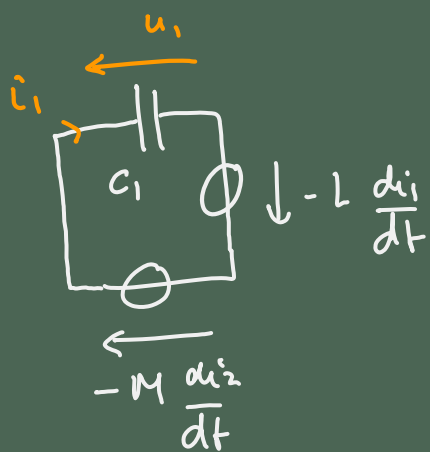


## Circuits LC couplés

1. Circuits équivalents :



Loi des mailles :

$$\begin{cases} u_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0 \\ u_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

Or  $\begin{cases} i_1 = C \dot{u}_1 \\ i_2 = C \dot{u}_2 \end{cases}$

D'où

$$\begin{cases} u_1 + LC \ddot{u}_1 + MC \ddot{u}_2 = 0 & (1) \\ u_2 + LC \ddot{u}_2 + MC \ddot{u}_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

2. Posons  $x = u_1 + u_2$  et  $y = u_1 - u_2$ , alors :

$$\begin{cases} (1) + (2) : (L+M)C \ddot{x} + x = 0 \\ (1) - (2) : (L-M)C \ddot{y} + y = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_1^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y = 0 \end{cases} \quad \text{avec : } \begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}} \\ \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L-M)C}} \end{cases}$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$\begin{cases} x = \alpha \cos(\omega_1 t) + \beta \sinh(\omega_1 t) \\ y = \alpha' \cos(\omega_2 t) + \beta' \sinh(\omega_2 t) \end{cases}$$

Or :  $\begin{cases} u_1(0^+) = u_0 \\ u_2(0^+) = 0 \end{cases}$       Donc :  $\begin{cases} x(0^+) = u_0 \\ y(0^+) = u_0 \end{cases}$

D'où :  $\begin{cases} \alpha = u_0 \\ \alpha' = u_0 \end{cases}$

De plus,  $i_1(0^+) = 0 = i_2(0^+)$ , par continuité de l'intensité imposée par les bobines. Et  $\begin{cases} \dot{i}_1 = C \dot{u}_1 \\ \dot{i}_2 = C \dot{u}_2 \end{cases}$

Donc :  $\begin{cases} \dot{u}_1(0^+) = 0 \\ \dot{u}_2(0^+) = 0 \end{cases}$  et ainsi  $\begin{cases} \dot{x}(0^+) = 0 \\ \dot{y}(0^+) = 0 \end{cases}$

Or :  $\begin{cases} \dot{x} = -\alpha \omega_1 \sin(\omega_1 t) + \beta \omega_1 \cosh(\omega_1 t) \\ \dot{y} = -\alpha' \omega_2 \sinh(\omega_2 t) + \beta' \omega_2 \cosh(\omega_2 t) \end{cases}$       D'où  $\begin{cases} \beta = 0 \\ \beta' = 0 \end{cases}$

Ainsi  $\begin{cases} x = u_0 \cos(\omega_1 t) \\ y = u_0 \cos(\omega_2 t) \end{cases}$

Or :  $\begin{cases} u_1 = \frac{x+y}{2} \\ u_2 = \frac{x-y}{2} \end{cases}$       D'où :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{u_0}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \\ u_2 &= \frac{u_0}{2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \end{aligned}$$

$$3. \text{ On a: } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{M}{L}}}$$

$$= \omega_0 \left(1 + \frac{M}{L}\right)^{-1/2}$$

$\left|\frac{M}{L}\right| \ll 1$ , utilisons

$$\omega_1 \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{M}{L}\right)$$

alors  $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha \varepsilon$

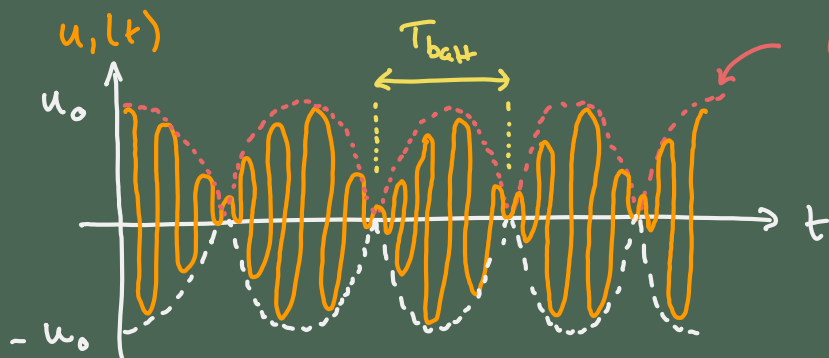
où  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

De même

$$\omega_2 \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{M}{L}\right)$$

4.  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont très proches, on observera alors un phénomène de battements (voir S2 - Séq.B)

de période de battements  $T_{\text{batt}} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{|M|}{L}$



$$u_0 \left| \cos\left(\frac{M}{L} \omega_0 t\right) \right|$$

Allure identique pour  $u_2(t)$  mais translatée (car  $u_2(0)=0$ )

Rappel

$$u_1 = \frac{u_0}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]$$

$$= \frac{u_0}{2} \cdot 2 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

$$= u_0 \cos\left(\frac{M}{L} \omega_0 t\right) \cos(\omega_0 t)$$

pulsation lente

pulsation rapide

$u_1$  est de pulsation  $\omega_0$  d'amplitude modulée  $u_0 \left| \cos\left(\frac{M}{L} \omega_0 t\right) \right|$