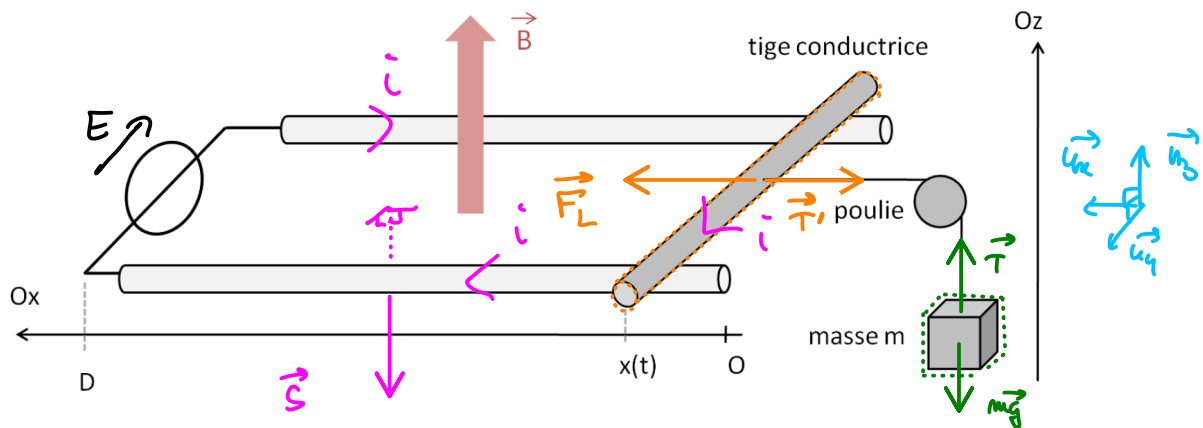


Soulèvement d'une masse grâce aux rails de Laplace



- 1] □ On peut choisir d'orienter i dans le même sens que $\vec{u}_y$. Ainsi, la force de Laplace s'exerçant sur la tige s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= i \vec{l} \wedge \vec{B} \\ &= i l \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z \\ &= i l B \vec{u}_x\end{aligned}$$

Il faut que $\vec{F}_L$ agisse suivant $+\vec{u}_x$ pour soulever la masse. On doit donc imposer $i > 0$.

Pour cela, on oriente $E > 0$ dans le même sens que le courant, c'est-à-dire dans le même sens que $i > 0$.

- 2] Supposons le référentiel d'étude galiléen. Par ailleurs, la 2^{ème} loi de Newton appliquée à la masse donne :

$$m \vec{a} = m \vec{g} + T \vec{u}_y \quad \text{où } T = \|\vec{T}\|$$

$$m \ddot{z} = -mg + T \quad \text{après projection suivant } \vec{u}_y$$

$$\boxed{m \dot{v} = -mg + T} \quad (1)$$

→ quelle est l'expression de T ?

On sait que $T = T'$ (où $T' = \|\vec{T}'\|$)
car le fil et la poulie sont de masses négligeables.

Appliquons alors la 2^{ème} loi de Newton à la tige :

$$m_t \frac{d\vec{v}_t}{dt} = \vec{F}_L - T' \vec{u}_r + m_t \vec{g} + \overbrace{\vec{R}_{v1} + \vec{R}_{v2}}^{\text{réactions normales des rails}}$$

vitesse de la tige (pointing to $\frac{d\vec{v}_t}{dt}$)

$$\boxed{m_t \ddot{x} = ilB - T'} \quad \text{par projection suivant } \vec{u}_x$$

Or :

$$\begin{cases} |\dot{x}| = |\dot{z}| & \text{car le fil est inextensible} \\ \dot{x} > 0 \Leftrightarrow \dot{z} > 0 \end{cases}$$

D'où $\dot{x} = \dot{z} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{z} = \ddot{z}$

Donc : $m_t \ddot{z} = ilB - T' \quad \hookrightarrow T = T'$

$$\boxed{T = ilB - m_t \ddot{z}}$$

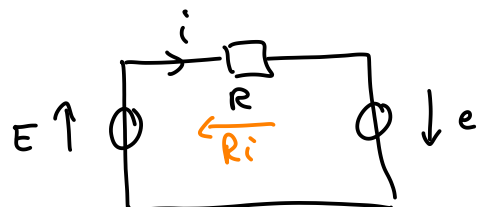
Ainsi : (1) devient :

$$\boxed{(m + m_t) \ddot{z} = -mg + ilB} \quad (2) \quad (\text{équation mécanique})$$

→ quelle est l'expression de i ?

Étudions le circuit équivalent :

où $e = - \frac{d\phi}{dt}$ (loi de Faraday)



$$\begin{aligned}\underline{\text{et}} \quad \phi &= \vec{B} \cdot \vec{S} \quad (\text{car } \vec{B} \text{ est uniforme}) \\ &= B \vec{u}_y \cdot (-l(D-x) \vec{u}_z) \\ &= Blx - BlD\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc} \quad e &= -Bl\dot{x} \\ \underline{e} &= -Blv\end{aligned}$$

de loi des mailles donne alors :

$$\underline{E - Ri + e = 0} \quad (3) \quad (\text{eq. électrique})$$

$$i = \frac{E + e}{R}$$

$$\underline{i = \frac{E}{R} - \frac{Blv}{R}}$$

AINSI (2) devient :

$$(m + m_t) \ddot{x} = -mg + \frac{EBl}{R} - \frac{(Bl)^2}{R} v$$

$$(m + m_t) \ddot{x} + \frac{(Bl)^2}{R} v = \frac{EBl}{R} - mg$$

$$\frac{(m + m_t)R}{(Bl)^2} \ddot{x} + v = \frac{E}{Bl} - \frac{mgR}{(Bl)^2}$$

$$\tau \ddot{x} + v = v_e$$

$$\text{on} \quad \begin{cases} \tau = \frac{m + m_t}{(Bl)^2} R \\ v_e = \frac{E}{Bl} - \frac{mgR}{(Bl)^2} \end{cases}$$

3] La solution est de la forme :

$$v(t) = v_p + v_h(t)$$

↑
solution
particulière
constante
car 2nd membre constant

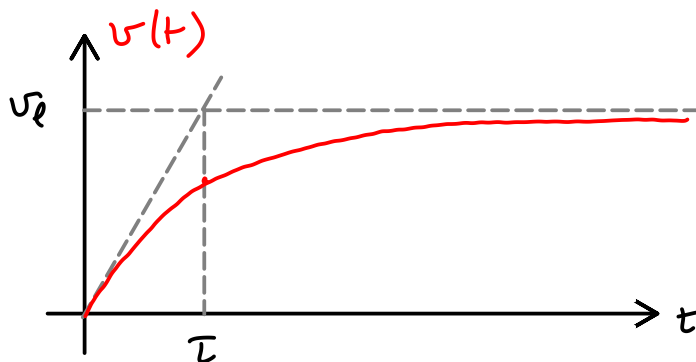
↑ solution de l'équation homogène
 $Ae^{-t/\tau}$

$$v(t) = v_e + Ae^{-t/\tau}$$

Or $v(0) = 0 \Rightarrow v_e + A = 0$

$$\Rightarrow A = -v_e$$

D'où $v(t) = v_e (1 - e^{-t/\tau})$



4] on veut $v_e > 0 \Leftrightarrow \frac{E}{Bl} > \frac{mgR}{(Bl)^2}$

$$\Leftrightarrow E > \frac{mgR}{Bl}$$

5] Effectuons (2) x 5 :

$$(m + m_t) v \dot{v} = -mgv + i l B v$$

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{E_{c, \text{marne}}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_t v^2}_{E_{c, \text{tige}}} \right) = \underbrace{\mathcal{P}(\text{puissance})}_{= - \frac{dE_p}{dt}} + i l B v$$

car $E_p = mgz$

$E_{c, \text{tot.}}$

Par ailleurs, effectuons (3) x i :

$$E_i - R i^2 + e i = 0$$

$$E_i - R i^2 - B l v i = 0$$

$$i l B v = E_i - R i^2$$

D'où

$$\frac{dE_{c, \text{tot}}}{dt} = - \frac{dE_p}{dt} + E_i - R i^2$$

$$E_i = \frac{dE_p}{dt} + \frac{dE_{c, \text{tot}}}{dt} + R i^2$$

↓

puissance
électrique
fournie
par $\vec{E}$

↓

Variation
de $E_p = mgz$
↓
augmentation
de z
(ce qui était demandé)

↓

Variation
de
l'énergie
cinétique
totale

↓

pertes par effet
jaule