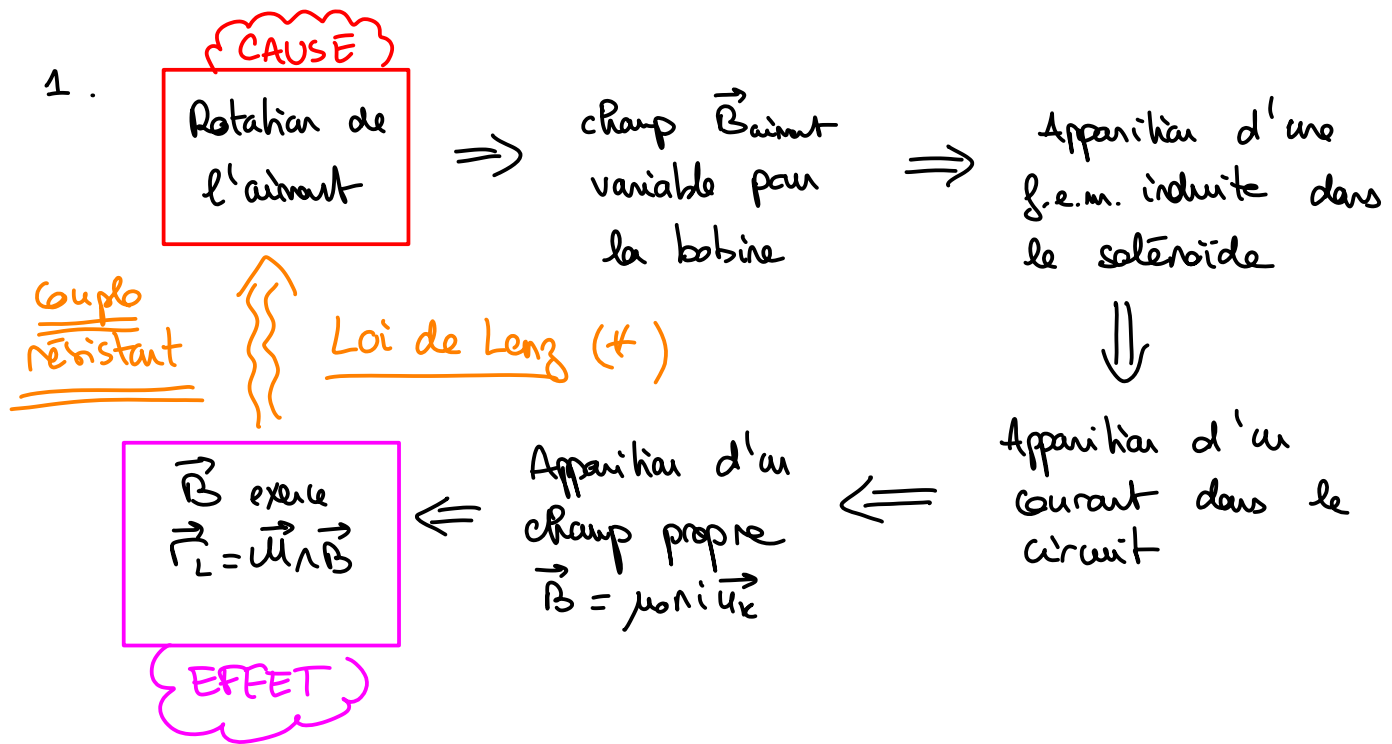
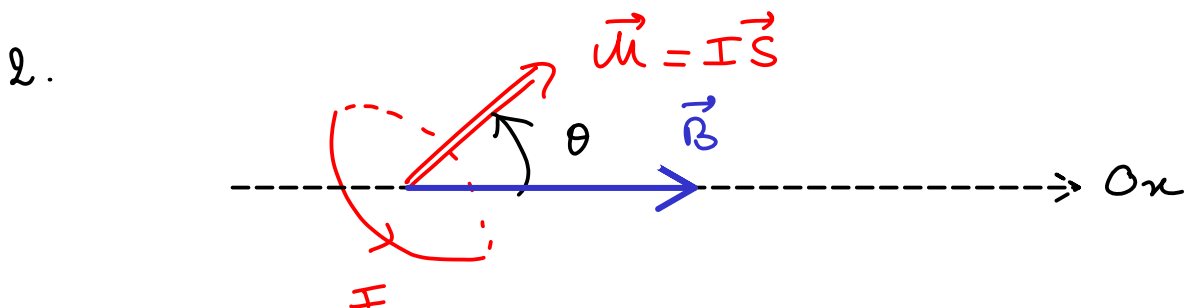


Dynamique d'un cycliste



(*) L'effet du phénomène d'induction s'oppose à la cause qui lui a donné naissance

Ainsi, afin de maintenir un mouvement de rotation, le cycliste doit exercer un couple moteur $\Gamma_p > 0$ s'opposant à $\Gamma_L < 0$ qui tend à ralentir la rotation.



$$\Phi_{sd \rightarrow sp} = \vec{B} \cdot \vec{S} \quad \text{car } \vec{B} \text{ est uniforme}$$

$$= \mu_0 n i \vec{u}_x \cdot \vec{S}$$

$$\Phi_{sd \rightarrow sp} = \mu_0 n i S \cos \theta$$

On a $\Phi_{\text{sol} \rightarrow \text{sp}} = M i$, par définition de M .

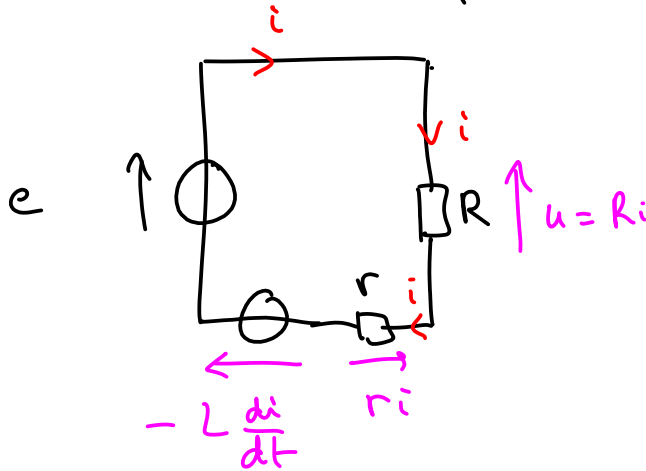
Par identification :

$$M = \mu_0 n S \cos \theta$$

D'où $\Phi_{\text{sp} \rightarrow \text{sol}} = M I$

$$\Phi_{\text{sp} \rightarrow \text{sol}} = \mu_0 n \underbrace{I S \cos \theta}_{= \mathcal{M}}$$

3. Circuit électrique équivalent :



$$\begin{aligned} \text{où } e &= - \frac{d\Phi_{\text{sp} \rightarrow \text{sol}}}{dt} \\ &= - \mu_0 n \mathcal{M} \frac{d \cos \theta}{dt} \\ &= \mu_0 n \mathcal{M} \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

$$e = \mu_0 n \mathcal{M} \Omega_0 \sin(\Omega_0 t)$$

La loi des mailles donne :

$$e - R i - r i - L \frac{di}{dt} = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + \underbrace{(R+r)}_{\approx R \text{ car } r \ll R} i = e$$

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{e}{R}$$

$$\tau \frac{di}{dt} + i = I_0 \sin(\Omega_0 t) \quad \text{où : } \begin{cases} \tau = \frac{L}{R} \\ I_0 = \frac{\mu_0 n \mathcal{M} \Omega_0}{R} \end{cases}$$

4. En RSF établi :
à la pulsation $\omega = \omega_0$

$$i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$$

Notons $\begin{cases} \underline{i} = \underline{I} e^{j\omega t} \\ \underline{I} = I e^{j\varphi} \end{cases}$

objectif : déterminer $\underline{I}$

Par la méthode de résolution complexe :

$$\tau \frac{di}{dt} + i = I_0 e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

de sorte que
 $\text{Re}(e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})})$

$$j\omega\tau \underline{i} + \underline{i} = \underline{I_0} e^{j\omega t}$$

$$= I_0 e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$= \sin(\omega t)$$

$$(1 + j\omega\tau) \underline{I} e^{j\omega t} = \underline{I_0} e^{j\omega t}$$

D'où $\underline{I} = \frac{\underline{I_0}}{1 + j\omega\tau}$

Ainsi : $I = |\underline{I}| = \frac{I_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$

$$I = \frac{\mu_0 n \omega}{R \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

Et $\varphi = \text{Arg } \underline{I}$

$$= \text{Arg } \underline{I_0} - \text{Arg}(1 + j\omega\tau)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\omega\tau)$$

Finalement : $i(t) = I \cos\left[\omega t - \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau)\right]$

$i(t) = I \sin\left[\omega t - \arctan(\omega\tau)\right]$

5. D'après le théorème du moment cinétique :

$$J \dot{\Omega} = \Gamma_{op} + \Gamma_L$$

Or $\Omega = \Omega_0 = \omega$, constante

D'au $\left| \Gamma_{op} = - \Gamma_L \right|$

ou $\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B}$

$$= \begin{pmatrix} M \cos \theta \\ M \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad \text{(ou } B = \mu_0 n i \text{)}$$

$$\vec{\Gamma}_L = - M B \sin \theta \vec{u}_0$$

D'au $\Gamma_L = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{u}_0$

$\Gamma_L = - M B \sin \theta$

Donc : $\Gamma_{op} = M B \sin \theta$ } $B = \mu_0 n i$

$$= \mu_0 n M i \sin \theta$$

$\Gamma_{op} = \mu_0 n M I \sin\left[\omega t + \arctan(\omega\tau)\right] \sin(\omega t)$

$$\text{Or } \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$(\text{Ici } a = \omega t + \arctan(\omega\tau) \text{ et } b = \omega t)$$

D'après :

$$\Gamma_{op} = \frac{\mu_0 n \omega I}{2} \left[\underbrace{\cos(\arctan(\omega\tau))}_{\text{constante}} - \underbrace{\cos(2\omega t + \arctan(\omega\tau))}_{\text{terme sinusoïdal dont de moyenne nulle}} \right]$$

D'après :

$$\langle \Gamma_{op} \rangle = \frac{\mu_0 n \omega I}{2} \cos(\arctan(\omega\tau))$$

$$\langle \Gamma_{op} \rangle = \frac{\mu_0 n \omega I}{2 \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

← d'après l'énoncé

$$\langle \Gamma_{op} \rangle = \frac{(\mu_0 n \omega)^2 \omega}{2 R [1 + (\omega\tau)^2]}$$

$$\leftarrow I = \frac{\mu_0 n \omega}{R \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

6. Multiplions l'équation électrique par i : $e = Ri + L \frac{di}{dt}$

$$ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

$$ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

$$\text{à } ei = \mu_0 n \omega i \sin \theta$$

Multiplications l'équation mécanique : $\Gamma_{op} = -\Gamma_L$
 par ω :

$$\begin{aligned}\Gamma_{op} \omega &= -\Gamma_L \omega \\ &= -\mu B \omega \sin \theta \\ &= -\mu_0 n i \mu \omega \sin \theta \\ &= -e i\end{aligned}$$

$\hookrightarrow B = \mu_0 n i$

$$\Gamma_{op} \omega = Ri^2 + \frac{dE_L}{dt}$$

où $E_L = \frac{1}{2} Li^2$

puissance
fournie par
l'opérateur

pertes par
effet Joule

variation d'énergie
stockée sous forme
magnétique
(par la bobine)

Rmq : la puissance moyenne que doit fournir
l'opérateur à vitesse angulaire ω constante
est :

$$\langle \Gamma_{op} \omega \rangle = \frac{(\mu_0 n i \omega)^2}{2R [1 + (\omega \tau)^2]} \quad \dots$$