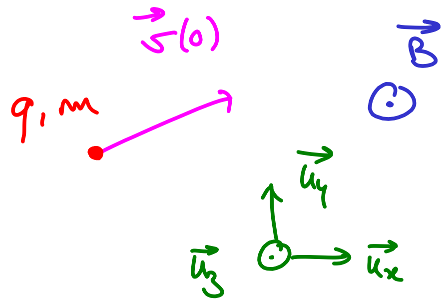
Mouvement d'une particule chargée dans $\vec{B}$ statique et uniforme ...

... avec $\vec{v}(0) \perp \vec{B}$:



Notons $\vec{B} = B\vec{u_z}$

où $B = \|\vec{B}\|$

$\Longrightarrow$ Montrons que le mouvement est circulaire

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \qquad \text{(2ème loi de Newton)}$$

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \wedge B\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= qB\begin{pmatrix}\dot{y}\\ -\dot{x}\\ 0\end{pmatrix}$$

D'où par projection suivant $\vec{u_x}$, $\vec{u_y}$ et $\vec{u_z}$:

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} & (1)\\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} & (2)\\ m\ddot{z} = 0 & (3)\end{cases}}$$

(3) $\Rightarrow$ $\dot{z} =$ constante

$= \dot{z}(0)$

$= \vec{v}(0)\,\vec{u_z}$

$= 0$ car $\vec{v}(0) \perp \vec{u_z}$ $\left(\text{car } \begin{cases} \vec{B} \,/\!/\, \vec{u_z} \\ \vec{v}(0) \perp \vec{B} \end{cases}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{z(t) = \text{constante}}$$

Autant choisir l'origine O tel que $z(0) = 0$ dans le cas.

Ainsi : $\boxed{\forall t,\ z(t) = 0}$

Le mouvement a donc lieu dans le plan (Oxy).

Exploitons à présent (1) et (2) pour établir l'équation cartésienne de la trajectoire :

Notons $\Omega_c = \frac{qB}{m}$ (pulsation « cyclotron »)

$$\begin{cases} (1) \Leftrightarrow & \dot{x} - \Omega_c\, y = 0 \quad (4) \\ (2) \Leftrightarrow & \dot{y} + \Omega_c\, x = 0 \quad (5) \end{cases}$$

l'originalité de la démonstration commence ici !

Posons $u = x + jy$

Effectuons $(4) + j(5)$:

$$(\dot{x} + j\dot{y}) + \Omega_c (jx - y) = 0$$

$$\dot{u} + j\Omega_c u = 0$$

C'est une équation de la forme $f' + \lambda f = 0$ de solution $f(x) = A e^{-\lambda x}$

D'où : $u(t) = A e^{-j\Omega_c t}$

Or : $\begin{cases} x = \mathrm{Re}(u) \\ y = \mathrm{Im}(u) \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x} = A\cos(-\Omega_c t) = A\cos(\Omega_c t) \\ \dot{y} = A\sin(-\Omega_c t) = -A\sin(\Omega_c t) \end{cases}$$

Primitivons :

$$\begin{cases} x = \dfrac{A}{\Omega_c}\sin(\Omega_c t) + a \\ y = \dfrac{A}{\Omega_c}\cos(\Omega_c t) + b \end{cases}$$, où a et b sont des constantes

$$\begin{cases} x - a = \dfrac{A}{\Omega_c}\sin(\Omega_c t) \\ y - b = \dfrac{A}{\Omega_c}\cos(\Omega_c t) \end{cases}$$

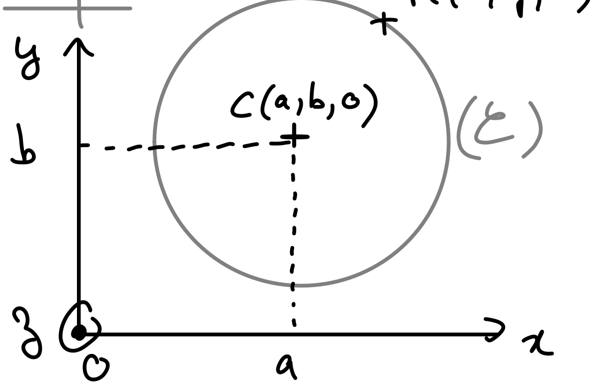
D'où :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \left(\frac{A}{\Omega_c}\right)^2 \underbrace{\left[\sin^2(\Omega_c t) + \cos^2(\Omega_c t)\right]}_{=1}$$

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$$, où $R = \left|\dfrac{A}{\Omega_c}\right|$

Il s'agit bien de l'équation cartésienne d'un cercle (de rayon R et de centre de coordonnées $(a, b, 0)$)

Pourquoi ?



$M \in \mathcal{E}$

$\Leftrightarrow \quad CM = R$

$\Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{CM}\|^2 = R^2$

avec $\quad \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$