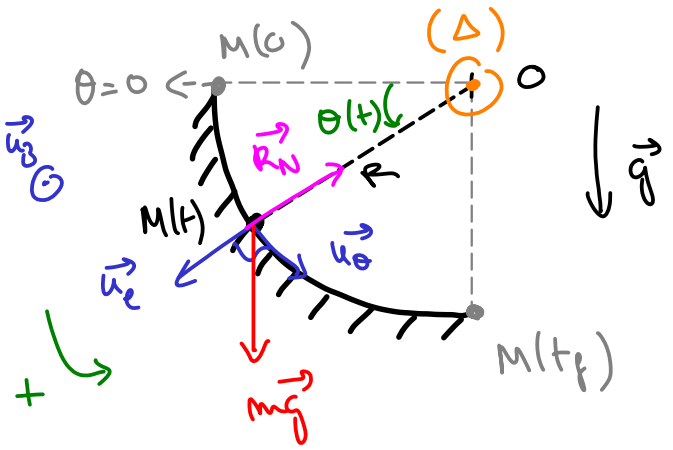
Vitesse en sortie d'un toboggan



Hyp : pas de frottements

Réf. terrestre supposé galiléen

1/ On a : $\vec{L_O}(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

$= R\vec{u_r} \wedge m R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$= mR^2\dot{\theta}\,\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta}$

$= mR^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}$

D'où $L_\Delta(M) = \vec{L_O}(M) \cdot \vec{u_z}$

$$\boxed{L_\Delta(M) = mR^2\dot{\theta}}$$

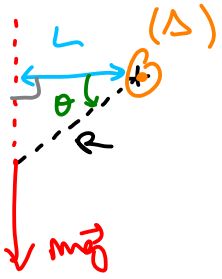
De plus : $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{R_N}) = 0}$ car $\vec{R_N}$ est de bras de levier nul

Et : $\mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) = \mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}_\perp)$ où $m\vec{g} = m\vec{g}_\perp$

$= \pm L \cdot \|m\vec{g}_\perp\|$

L : bras de levier de $m\vec{g}$

$\|m\vec{g}_\perp\| = mg$



Or $L = R\cos\theta$

Et $\mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) > 0$ car $m\vec{g}$ agit dans le sens direct associé à $\vec{u}_\Delta$.

D'où $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) = mgR\cos\theta}$

Ainsi d'après le TMC par rapport à l'axe (Δ) :

$$\frac{dL_\Delta(M)}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R_N})$$

$$\frac{d(mR^2\dot{\theta})}{dt} = mgR\cos\theta$$

$$mR^2\ddot{\theta} = mgR\cos\theta$$

$$\boxed{R\ddot{\theta} = g\cos\theta}$$

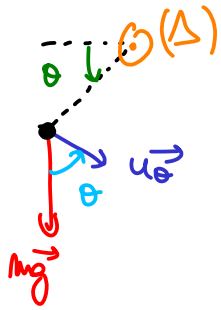
2] À l'aide la 2ème loi de Newton :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R_N} \qquad \text{où} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$$
(mvt circulaire)

Projetons suivant $\vec{u_\theta}$:

$$mR\ddot{\theta} = m\vec{g}\cdot\vec{u_\theta} + \underbrace{\vec{R_N}\cdot\vec{u_\theta}}_{=0 \text{ car } \vec{R_N}\cdot\vec{u_\theta}}$$

$$= mg\cos\theta$$



D'où $\boxed{R\ddot{\theta} = g\cos\theta}$

3] Multiplions par $\dot\theta$:

$$R\,\dot\theta\ddot\theta = g\,\dot\theta\cos\theta$$

$R\dot\theta\ddot\theta$: du type $u'u = \left(\frac{1}{2}u^2\right)'$

$g\dot\theta\cos\theta$: du type $u'\cos u = (\sin u)'$

Intégrons entre $t_i = 0$ et t_f :

$$R\int_{t_i}^{t_f} \dot\theta\ddot\theta\,dt = g\int_{t_i}^{t_f} \dot\theta\cos\theta\,dt$$

$$R\left[\frac{1}{2}\dot\theta^2(t)\right]_{t_i}^{t_f} = g\left[\sin\theta(t)\right]_{t_i}^{t_f}$$

$\dot\theta^2 = \frac{v^2}{R^2}$

Rappel : $\vec{v}$ circulaire

$\vec{v} = R\dot\theta\,\vec{u_\theta}$

$\|\vec{v}\| = v = R|\dot\theta|$

$$\frac{1}{2R}\left(v_f^2 - \underbrace{v_i^2}_{=0}\right) = g\left(\sin\theta_f - \sin\theta_i\right)$$

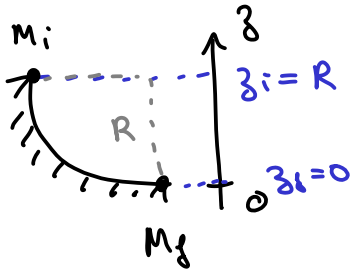
$$\frac{1}{2R}v_f^2 = g\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)$$

$$\boxed{v_f = \sqrt{2gR}}$$

AN : $v_f = 7{,}0\ \text{m.s}^{-1} = 25\ \text{km.h}^{-1}$

(Ça fait beaucoup ! mais parce qu'on a négligé les frottements ...)

4] L'énergie mécanique est conservée car $m\vec{g}$ et $\vec{R_N}$ sont conservatives. D'où :



$$E_{mf} = E_{mi}$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mg\underbrace{z_f}_{=0} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_i^2}_{=0} + mg\underbrace{z_i}_{=R}$$

D'où $\boxed{v_f = \sqrt{2gR}}$

(Méthode beaucoup plus rapide !!!)