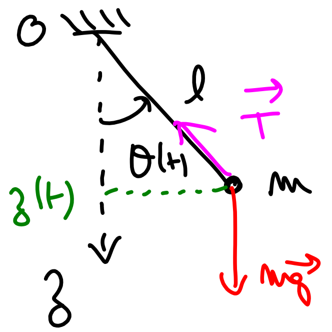
Amplification des oscillations d'un pendule



$\downarrow \vec{g}$

On suppose le référentiel du laboratoire galiléen.

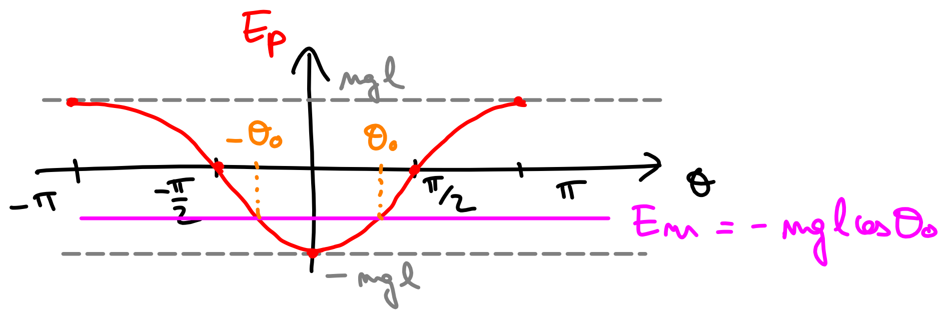
1) On a : $E_p = -mgz$ (axe Oz vers le bas)

$$E_p = -mg\ell\cos\theta$$

Et : $E_m(t) = E_m(t_0)$ par conservation de l'énergie mécanique.

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 + E_{p0}$$

$$= -mg\ell\cos\theta_0 \qquad (\text{car } v_0 = 0)$$



Puisque $E_p \leqslant E_m$, alors le mouvement est borné entre θ_0 et $-\theta_0$.

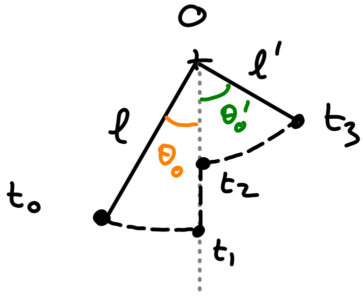
2) On a $E_m(t_1) = E_m(t_0)$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - mg\ell\cos\theta_1 = -mg\ell\cos\theta_0$$

$\theta_1 = 0$

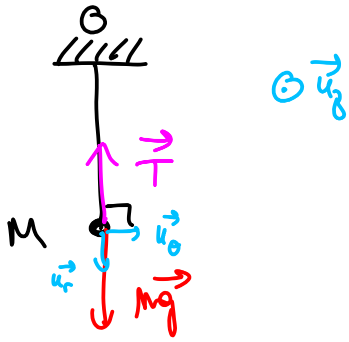
$$\boxed{v_1 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta_0)}}$$

3) D'après le TMC par rapport à O :



$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(m\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$$

Or entre t_1 et t_2 :



$$\begin{cases} \vec{OM} \parallel \vec{T} \\ \vec{OM} \parallel m\vec{g} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_O(m\vec{g}) = \vec{0} \end{cases}$$

D'où $\dfrac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{\text{constant}} \text{ entre } t_1 \text{ et } t_2}$

À t_1 :
$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}_1$$
$$= \ell \vec{u}_r \wedge m\, v_1 \vec{u}_\theta$$
(mouvement circulaire à t_1)
$$= m \ell v_1 \vec{u}_z$$

De même, à t_2 :
$$\vec{L}_O(M) = m \ell' v_2 \vec{u}_z$$

Ainsi : $\boxed{\ell' v_2 = \ell v_1}$ $\longrightarrow$ $v_2 = \dfrac{\ell}{\ell'} v_1 > v_1$

la vitesse a augmenté

Or : $v_1 = \ell \Omega_1$ et $v_2 = \ell' \Omega_2$

(mouvements circulaires)

D'où : $\boxed{l'^2 \Omega_2 = l^2 \Omega_1}$

De même : $\Omega_2 = \left(\frac{l}{l'}\right)^2 \Omega_1$

$\Rightarrow \Omega_2 > \Omega_1$

$\Rightarrow$ la vitesse angulaire a augmenté

4) Par analogie avec la question 2 :

$$v_2 = \sqrt{2gl'(1-\cos\theta_0')}$$

$$\frac{l}{l'} v_1 = \sqrt{2gl'(1-\cos\theta_0')}$$

$l' v_2 = l v_1$

$$\frac{l}{l'} \sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)} = \sqrt{2gl'(1-\cos\theta_0')}$$

D'où $\boxed{\left(\frac{l}{l'}\right)^3 (1-\cos\theta_0) = 1-\cos\theta_0'}$

$$\boxed{\cos\theta_0' = 1 + (\cos\theta_0 - 1)\cdot\left(\frac{l}{l'}\right)^3}$$

Rmq : pourquoi y a-t-il amplification des oscillations ?

On a $\left(\frac{l}{l'}\right)^3 > 1$

$\Rightarrow \left(\frac{l}{l'}\right)^3 (1-\cos\theta_0) > 1-\cos\theta_0$

$\Rightarrow 1-\cos\theta_0' > 1-\cos\theta_0$

$\Rightarrow \cos\theta_0' < \cos\theta_0$

$\Rightarrow \boxed{\theta_0' > \theta_0}$ car $x \to \cos x$ est décroissante sur $[0,\pi]$

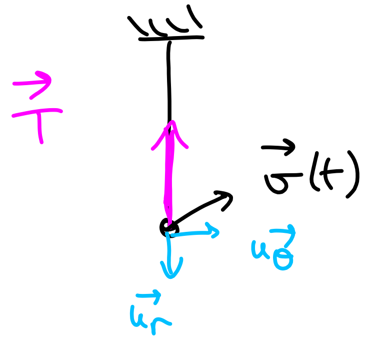
5) L'énergie mécanique Em a augmenté car :

- $z_2 < z_1 \Rightarrow -mgz_2 > -mgz_2$
$\Rightarrow \boxed{E_p(t_2) > E_p(t_1)}$

- $\ell' v_2 = \ell v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{\ell}{\ell'} v_1 \Rightarrow v_2 > v_1$ (car $\frac{\ell}{\ell'} > 1$)
$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 > \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow \boxed{E_c(t_2) > E_c(t_1)}$

DONC : $\boxed{E_m(t_2) > E_m(t_1)}$

Cela est dû à la tension $\vec{T}$ du fil qui a travaillé de manière motrice entre t_1 et t_2 lors du raccourcissement. En effet :



$\vec{v}$ a ici une composante suivant $-\vec{u_r}$ à cause du raccourcissement

D'où $\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T}.\vec{v} > 0$

Que vaut $W(\vec{T})$?

D'après le théorème de l'énergie mécanique entre t_1 et t_2 :

$$\Delta E_m = W(\vec{T})$$

$$E_m(t_2) - E_m(t_1) = W(\vec{T})$$

car $\vec{T}$ est l'unique force non-conservative sur $[t_1, t_2]$

Or $\begin{cases} E_m(t_1) = E_m(t_0) = -mg\ell\cos\theta_0 \\ E_m(t_2) = E_m(t_3) = -mg\ell'\cos\theta_0' \end{cases}$

D'où $\boxed{W(\vec{T}) = mg(\ell\cos\theta_0 - \ell'\cos\theta_0')}$