Chapitre 5 : Théorème du moment cinétique

Prérequis

- chapitres de mécanique **M1, M2 M3**
- chapitre **BAO5 - Outils vectoriels**

Mots-clés

Moment (vectoriel ou scalaire) d'une force, moment cinétique (vectoriel ou scalaire) d'un point matériel, théorème du moment cinétique (vectoriel ou scalaire), bras de levier

Plan du cours

Les savoirs et les savoir-faire

Capacités exigibles

- ❑ Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
- ❑ Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
- ❑ Exprimer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
- ❑ Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

A TMC vectoriel par rapport à un point

A.1 Moment d'une force

1. Définir le moment d'une force.
2. Relier la direction et le sens du vecteur moment de force au sens d'action de cette force (règle de la main droite).

A.2 Moment cinétique d'un point matériel

3. Définir le moment cinétique d'un point matériel.
4. Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique au sens du mouvement (règle de la main droite).

A.3 Théorème du moment cinétique

5. Démontrer le théorème du moment cinétique vectoriel pour un unique point matériel.

A.4 Application au pendule simple

6. Retrouver l'équation différentielle du mouvement pour un pendule simple en utilisant le théorème du moment cinétique vectoriel.

B Moment scalaire d'une force par rapport à un axe

B.1 Définition

7. Définir le moment scalaire d'une force par rapport à un axe.
8. Montrer qu'il est indépendant du point de référence.

B.2 Rôle de la composante orthogonale de la force

9. Pour un axe de rotation Δ et une force $\overrightarrow{F}$ donnés, on note les composantes $\overrightarrow{F}_\perp$ et $\overrightarrow{F}_{//}$, respectivement orthogonale à Δ et parallèle à Δ.
   Montrer que la composante $\overrightarrow{F}_{//}$ n'a pas d'influence sur le moment scalaire. *(Autrement dit, montrer que le moment scalaire de $\overrightarrow{F}$ est égal au moment scalaire de $\overrightarrow{F}_\perp$.)*

B.3 Signe du moment scalaire d'une force

10. Relier le signe du moment scalaire d'une force au sens d'action de la force.

B.4 Notion de bras de levier

11. Définir le bras de levier de $\overrightarrow{F}$.
12. Établir l'expression du du moment scalaire de cette force en fonction du bras de levier et de $||\overrightarrow{F}_\perp||$.

C TMC scalaire par rapport à un axe

C.1 Moment cinétique scalaire d'un point matériel par rapport à un axe

13. Définir le moment cinétique scalaire par rapport à un axe.
14. Montrer qu'il est indépendant du point de référence.

C.2 Signe du moment cinétique scalaire

15. Relier le signe du moment cinétique scalaire au sens de rotation du mouvement.

C.3 TMC scalaire

16. Démontrer le théorème du moment cinétique scalaire pour un unique point matériel.

C.4 Application au pendule simple

17. Retrouver l'équation différentielle du mouvement pour un pendule simple en utilisant le théorème du moment cinétique scalaire.

Exercices

Difficulté de l'exercice (analyse, «technicité», ...) Durée de l'exercice

Compétences travaillées

Compétences travaillées	Exercices 1	Exercices 2
Exprimer le moment d'une force	•	•
Exprimer un moment cinétique	•	•
Appliquer le théorème du moment cinétique	•	•
Identifier et exploiter un cas de conservation du moment cinétique		•

Exercice 1 — Vitesse en sortie d'un toboggan

On considère un toboggan de forme circulaire de rayon $R = 2,5$ m et de centre O. Un enfant de masse $m = 20$ kg qu'on assimilera à un point matériel s'élance du haut du toboggan partant de la position angulaire $\theta = 0°$ (direction correspondant à l'horizontale passant par O). On néglige tout frottement.

1. À l'aide du théorème du moment cinétique, établir une relation de proportionnalité entre $\ddot{\theta}(t)$ et $\cos\theta(t)$.
2. Comment aurait-on pu établir autrement cette relation ?
3. Quelle opération simple suffit-il d'effectuer de chaque côté de l'égalité pour la rendre intégrable par rapport au temps ? En déduire la vitesse acquise par l'enfant à la sortie du toboggan.
4. Comment aurait-on pu retrouver ce résultat par une approche énergétique ?

Exercice 2 — Amplification des oscillations d'un pendule

On considère un pendule simple constitué d'un fil inextensible et sans masse de longueur ℓ. On note m la masse ponctuelle accrochée à l'extrémité mobile, l'autre étant immobile en O. On néglige tout frottement. La direction $\theta = 0°$ correspond à la verticale orientée vers le bas et passant par O. À l'instant t_0, on lâche la masse d'une position angulaire $\theta_0 > 0$ et sans vitesse.

1. Par une approche énergétique, expliquer pourquoi la masse oscillera entre les positions angulaires θ_0 et $-\theta_0$.
2. Quelle est la norme de vitesse v_1 de la masse lorsqu'elle passe par la verticale à l'instant t_1 ?

À t_1, le fil est brutalement raccourci. *(Cela étant rendu possible grâce à l'usage d'une poulie par exemple.)* L'instant t_1 représente désormais l'instant «juste avant» ce raccourcissement, et t_2 l'instant «juste après». On considère que la durée s'écoulant entre ces deux instants est négligeable. À partir de t_2, on note ℓ' la longueur du fil ainsi modifiée. On note v_2 et Ω_2 la vitesse et la vitesse angulaire à l'instant t_2.

3. Justifier que le moment cinétique soit conservé entre t_1 et t_2. En déduire une relation simple entre v_1 et v_2 d'une part, et entre Ω_1 et Ω_2 d'autre part.
4. Quelle est la nouvelle amplitude θ_0' des oscillations ? Montrer notamment qu'il y a eu amplification de l'amplitude.
5. Pourquoi peut-on affirmer que l'énergie mécanique a augmenté ? Quelle est la force non-conservative mise en jeu et quelle a été l'expression du travail correspondant ?