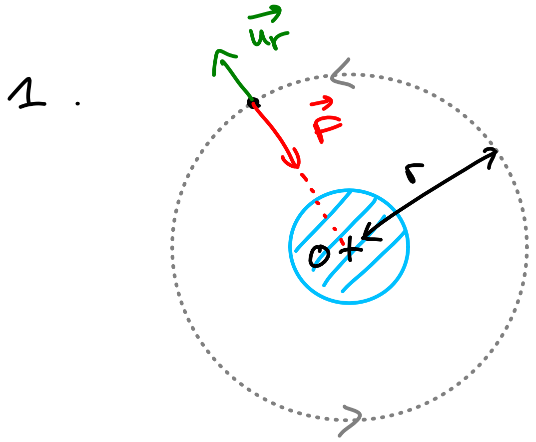
Freinage d'un satellite

Référentiel : géocentrique, supposé galiléen

1.



D'après la 2ème loi de Newton :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\underbrace{-\,m\frac{v^2}{r}\vec{u_r}}_{\text{car le mvt est circulaire et uniforme}} = -\frac{G\,m\,m_T}{r^2}\vec{u_r}$$

D'où
$$v^2 = \frac{G m_T}{r}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G m_T}{r}}}$$

2. On a : $\boxed{E_m = -\dfrac{G\,m\,m_T}{2r}}$ (résultat de cours)

Rmq : dans le cas circulaire, on peut aisément le démontrer ainsi :

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{} + \underbrace{E_p}_{}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{G m_T}{r}}_{} \underbrace{-\frac{G\,m\,m_T}{r}}_{}$$

$$E_m = -\frac{G\,m\,m_T}{2r}$$

3. D'après le TEM :

$$\Delta E_m = \underbrace{W(\vec{f})}_{\text{travail des forces NON-conservatives}}$$

Sur un intervalle de temps infinitésimal :

$$dE_m = \delta W(\vec{f})$$

D'où
$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{\delta W(\vec{f})}{dt}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f})$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{G m m_T}{2r}\right) = \vec{f}\cdot\vec{v}$$

$$-\frac{G m m_T}{2}\frac{d(1/r)}{dt} = -\alpha m v \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}}_{= v^2}$$

$$-\frac{G m m_T}{2}\cdot\left(-\frac{\dot{r}}{r^2}\right) = -\alpha m v^3$$

$$G m m_T \frac{\dot{r}}{2r^2} = -\alpha m \left(\frac{G m_T}{r}\right)^{3/2}$$

Après simplification : $\boxed{\dot{r} = -2\alpha\sqrt{G m_T r}}$

4. $\alpha > 0$ donc $-2\alpha\sqrt{G m_T r} < 0$

Ainsi $\dot{r} < 0 \Rightarrow$ $\boxed{r \text{ diminue !}}$

$\Rightarrow v \simeq \sqrt{\dfrac{G m_T}{r}}$ augmente !

Rmq : les frottements augmentent v ??

Paradoxe ??!

Non, car les frottements diminuent l'énergie mécanique !! et non pas v, a priori...

Ainsi, si il y a un gain d'énergie cinétique ($\Delta E_c > 0$), alors c'est qu'il y a une perte d'énergie potentielle ($\Delta E_p < 0$) plus forte ($|\Delta E_p| > \Delta E_c$) afin que $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p < 0$ ...

5. Partons de : $\frac{dr}{dt} = -\alpha \sqrt{G m_T r}$

Intégrons sur la durée $\Delta t = 1$ jour en considérant que le membre de droite est resté constant égal à $r(t_i) = 1{,}0 \cdot 10^3$ km

$\left(\text{car } r(t_i) \simeq r(t_i + \Delta t) \text{, puisque } |\Delta r| = 2{,}0 \text{ m} \ll r(t_i) \right)$

D'où :

$$\left[r(t) \right]_{t_i}^{t_i+\Delta t} \simeq -2\alpha \sqrt{G m_T r(t_i)} \cdot \left[t \right]_{t_i}^{t_i+\Delta t}$$

$$\Delta r \simeq -2\alpha \sqrt{G m_T r(t_i)}\, \Delta t$$

$$\boxed{\alpha \simeq \frac{-\Delta r}{2\sqrt{G m_T r(t_i)}\, \Delta t}}$$

AN :

$$\alpha = \frac{-(-2{,}0)}{2\sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 5{,}97 \cdot 10^{24} \times 1{,}0 \cdot 10^{6}} \times 24 \times 3600}$$

$$\boxed{\alpha = 5{,}8 \cdot 10^{-16} \text{ m}^{-1}}$$

Rmq 1 et sans approximation ?

On a : $\frac{dr}{dt} = -2\alpha\sqrt{Gm_T}\sqrt{r}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dr}{\sqrt{r}} = -2\alpha\sqrt{Gm_T}\,dt$$

D'où par intégration entre t_i et $t_f = t_i + \Delta t$:

$$\int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{\sqrt{r}} = -2\alpha\sqrt{Gm_T}\int_{t_i}^{t_f} dt$$

$$\left[2\sqrt{r}\right]_{r_i}^{r_f} = -2\alpha\sqrt{Gm_T}\,\left[t\right]_{t_i}^{t_i+\Delta t}$$

$$2\left(\sqrt{r_f} - \sqrt{r_i}\right) = -2\alpha\sqrt{Gm_T}\,\Delta t$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{r_i} - \sqrt{r_f}}{\sqrt{Gm_T}\,\Delta t}}$$

AN : $$\alpha = \frac{\sqrt{1{,}0.10^6} - \sqrt{1{,}0.10^6 - 2{,}0}}{\sqrt{6{,}67.10^{-11} \times 5{,}97.10^{24}} \times 24 \times 3600}$$

$$= 5{,}8.10^{-16}\ m^{-1}$$, Même résultat !

Rmq 2 Pourquoi c'est le même résultat ?

On a $\sqrt{r_f} = \sqrt{r_i + \Delta r}$

$= \sqrt{r_i}\sqrt{1+\varepsilon}$ où $\varepsilon = \frac{\Delta r}{r}$ et $|\varepsilon| \ll 1$

Exploiter alors $(1+\varepsilon)^a \simeq 1 + a\varepsilon$

...