Chapitre 6 : Mouvements à force centrale conservative

Prérequis

- chapitres de mécanique **M1 M2 M3**
- chapitre **M5 - Théorème du moment cinétique**

Mots-clés

force centrale, force newtonienne, constante des aires, énergie potentielle effective, mouvement radial borné, état lié, état libre, distance minimale d'approche, lois de Kepler, 1ère et 2ème vitesses cosmiques, période de révolution, orbite basse, orbite géostationnaire

Plan du cours

Les savoirs et les savoir-faire

A Force centrale conservative

A.1 Force centrale

1. Définir ce qu'est une force centrale $\overrightarrow{F}$ de centre O et agissant en M. On notera $r = OM$ et $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$.
2. Montrer qu'une force centrale conservative $\overrightarrow{F} = F(r)\overrightarrow{u_r}$ d'énergie potentielle E_p vérifie : $F(r) = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$.

A.2 Cas d'une force newtonienne

3. Traiter l'exemple d'une force newtonienne (expression de $F(r)$ et de $E_p(r)$).
Donner l'expression de la constante K apparaissant dans $F(r)$ dans le cas de l'interaction gravitationnelle et dans celui de l'interaction électrostatique (ou coulombienne).

B Conservation du moment cinétique et conséquences

Capacités exigibles

- Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique.
- Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.

B.1 Conservation du moment cinétique

4. Montrer que le moment cinétique par rapport à O d'un système soumis à une unique force centrale de centre O est conservé.

B.2 1ère conséquence : planéité du mouvement

5. Montrer alors que le mouvement est nécessairement plan en précisant de quel plan il s'agit.

B.3 2ème conséquence : loi des aires

6. Établir l'expression de la constante des aires C et exprimer $\overrightarrow{L_O}(M)$ en fonction de C notamment.
7. Énoncer et démontrer la **2ème loi de Kepler (loi des aires)**.

C Étude du mouvement radial

Capacités exigibles

- Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement. Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective. Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné du mouvement

C.1 Notion d'énergie potentielle effective

8. Montrer que l'énergie mécanique du système soumis à une unique force conservative peut s'écrire sous la forme : $E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ en précisant l'expression de l'énergie potentielle effective $E_{p,eff}(r)$.

C.2 Caractère borné du mouvement radial

9. Justifier que les seules valeurs de r possibles sont celles vérifiant : $E_{p,eff}(r) \leqslant E_m$.

10. Dans quel cas parlera-t-on d'état lié ? d'état libre (ou état de diffusion) ?

11. Lorsque $r = r_{min}$ ou r_{max} (si celui-ci existe, càd dans le cas d'un état lié), que peut-on dire de la vitesse radiale (vitesse suivant $\overrightarrow{u_r}$) ?

C.3 Cas d'un champ newtonien répulsif

12. Dans le cas newtonien répulsif ($K < 0$), établir l'allure graphique de $E_{p,eff}(r)$.

13. Justifier qu'on observe nécessairement un état de diffusion (ou état libre). Quel type de trajectoire peut être observé ?

C.4 Cas d'un champ newtonien attractif

14. Dans le cas newtonien attractif ($K > 0$), établir l'allure graphique de $E_{p,eff}(r)$.

◗ État libre

15. À quelle condition sur l'énergie mécanique observera-t-on un état libre ? Quels types de trajectoire peuvent être observés ?

16. Définir la deuxième vitesse cosmique d'un astre, établir son expression et la calculer dans le cas terrestre.

◗ État lié

17. À quelle condition sur l'énergie mécanique observera-t-on un état lié ? Quels types de trajectoire peuvent être observés ?

18. Énoncer la **1ère loi de Kepler (loi des orbites)**.

19. Dans le cas elliptique, définir l'apocentre, le péricentre, le demi-grand axe a.
Quelle relation relie le demi-grand axe a de l'ellipse, r_{min} et r_{max} ?

D Mouvement des satellites et des planètes

Capacités exigibles

Lois de Kepler
- ❑ Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.

Cas particulier du mouvement circulaire
- ❑ Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période.
- ❑ Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.

Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire et dans le cas du mouvement elliptique.
- ❑ Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.
- ❑ Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.

Satellites terrestres
- ❑ Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions.
- ❑ Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

Vitesses cosmiques : vitesse en orbite basse et vitesse de libération.
- ❑ Exprimer ces vitesses et citer leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.

D.1 Cas d'un mouvement circulaire

20. Dans le cas d'un mouvement circulaire autour d'un astre, justifier que le mouvement est uniforme.

21. Établir l'expression de la norme v de la vitesse.

22. Définir la première vitesse cosmique d'un astre, établir son expression et la calculer dans le cas terrestre.

D.2 Période de révolution

23. Démontrer la **3ème loi de Kepler (loi des périodes)** dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon R.

24. Généraliser au cas d'un mouvement elliptique de demi-grand axe a.

D.3 Les satellites terrestres

25. Décrire et justifier succinctement l'orbite d'un satellite météorologique en orbite basse. Donner un ordre de grandeur de l'altitude du satellite et estimer la période de révolution.

26. Mêmes questions pour un satellite de géolocalisation.

27. Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial. Quelles sont les applications d'un tel satellite ?

D.4 Expression de l'énergie mécanique

28. Dans le cas d'un mouvement elliptique de demi-grand axe a, montrer que $E_m = -\dfrac{K}{2a}$.

29. Que devient cette expression dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon R ?

Documents de cours

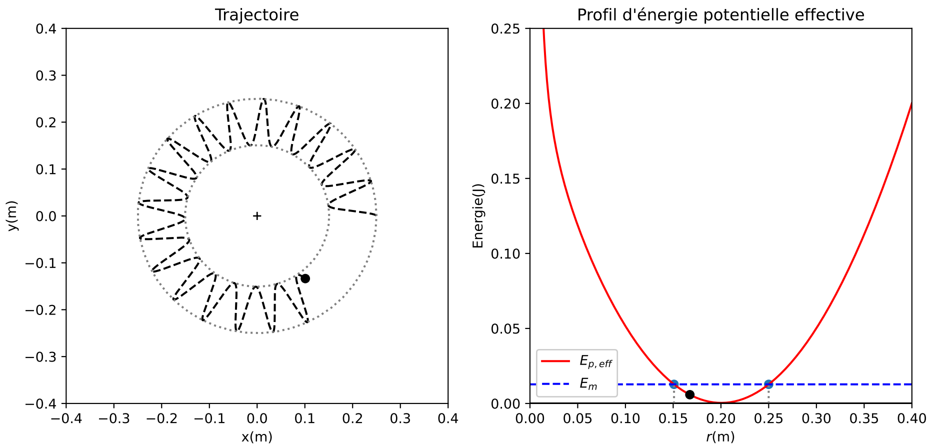
Document 1 Mouvement d'une masse au bout d'un ressort

Prenons un ressort de constante de raideur $k = 10$ N.m^{-1} et de longueur à vide $\ell_0 = 20$ cm. Une extrémité est fixe en O. Une masse ponctuelle $m = 50$ g est accrochée à l'autre extrémité. L"ensemble est disposé sur une table à coussin d'air horizontal.

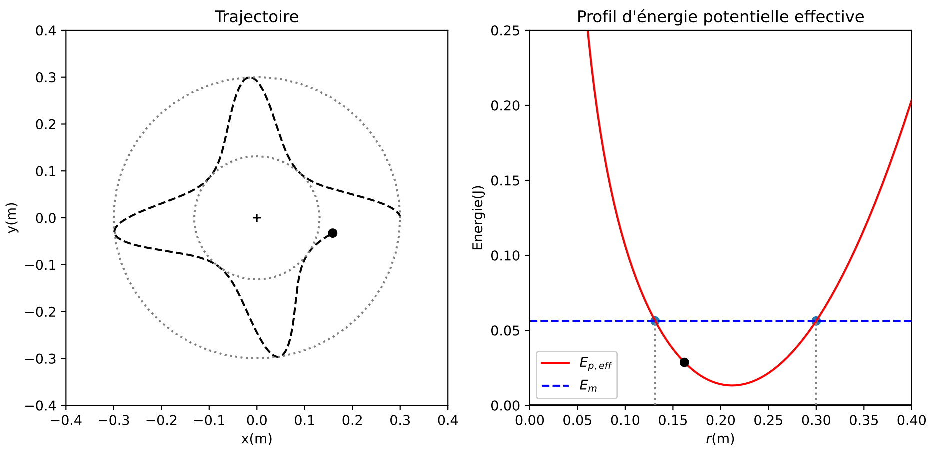
Énergie potentielle effective : $E_{p,eff} = \dfrac{mC^2}{2r^2} + \dfrac{1}{2}k(r-\ell_0)^2 \quad , \quad$ où $C = r^2\dot{\theta} = rv_\theta$.

Voici la trajectoire observée pour différentes conditions initiales.

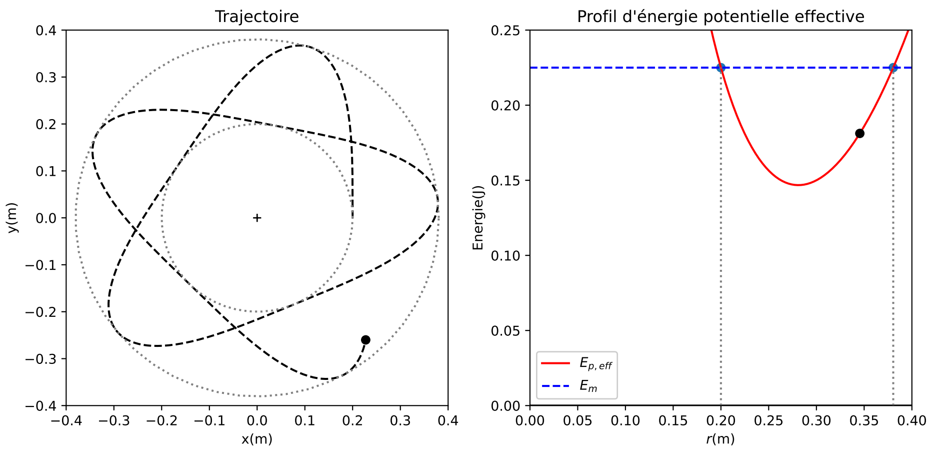
- ❑ $r(0) = 25$ cm et $v_\theta(0) = 10$ cm.s^{-1} , d'où $C = 0,025$ m^2.s^{-1} :



- ❑ $r(0) = 30$ cm et $v_\theta(0) = 50$ cm.s^{-1} , d'où $C = 0,15$ m^2.s^{-1} :



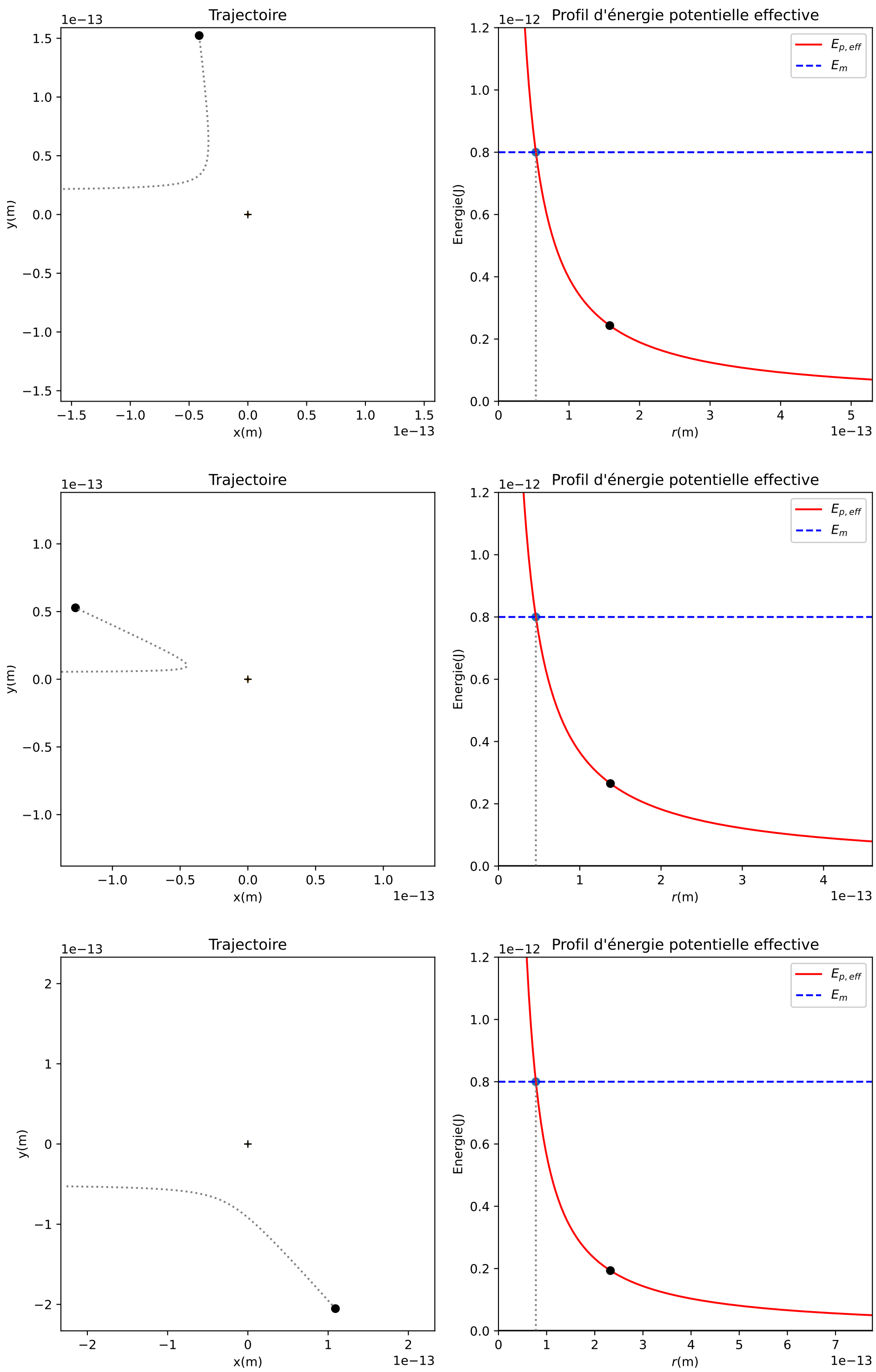
- ❑ $r(0) = 20$ cm et $v_\theta(0) = 3.0$ m.s^{-1} , d'où $C = 0,60$ m^2.s^{-1} :



Document 2 Mouvement dans un champ newtonien répulsif

Prenons l'exemple de l'expérience de Rutherford qui permit de révéler l'existence du noyau atomique : des particules α (noyau d'Helium) de masse $m = 6,64.10^{-27}$ kg, de charge $q = 2e$ «bombardent» une fine feuille d'or. Les noyaux d'or de numéro atomique $Z = 79$ sont de charge $q_O = Ze$. On présente ci-dessous la simulation de la trajectoire d'une particule α interagissant avec un noyau d'or et pour une énergie cinétique initiale de $\frac{1}{2}mv_0^2 = 5,0$ MeV et pour différents paramètres d'impact b (représentant la distance entre la direction de $\vec{v}(0)$ et le centre O).

Énergie potentielle effective : $E_{p,eff} = \dfrac{mC^2}{2r^2} + \dfrac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, où $C = \pm b v_0$.



Doc

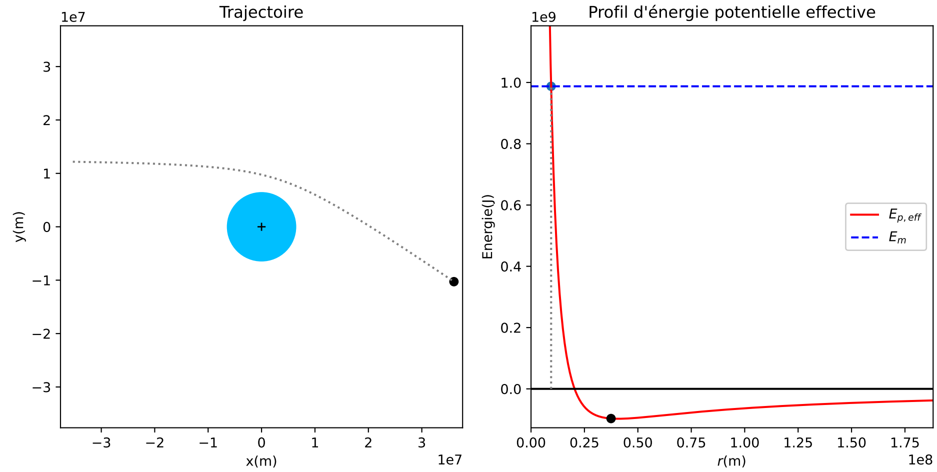
Document 3 **Mouvement dans un champ newtonien attractif**

Cas d'une masse ponctuelle m soumis à l'attraction de la Terre de masse $m_T = 5,97.10^{24}$ kg.
Énergie potentielle effective : $E_{p,eff} = \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{Gmm_O}{r}$

◗ Cas d'un état libre

Trajectoire hyperbolique Exemple d'une météorite de masse $m = 20$ kg de distance $r(0)$ initiale très grande et de vitesse initiale $v_0 = 10$ km.s^{-1} dans le référentiel géocentrique, de sorte que $E_m \simeq \dfrac{1}{2}mv_0^2$.

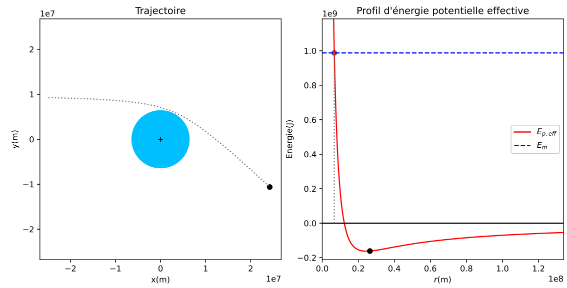
Dans un tel cas de figure, on introduit typiquement la distance notée b, appelée ***paramètre d'impact*** et représentant la distance entre la direction de $\vec{v}(0)$ évaluée très loin de la Terre et le centre O. On peut également montrer que $C = \pm bv_0$. Ci-dessous est représenté le cas $b = 2R_T$:



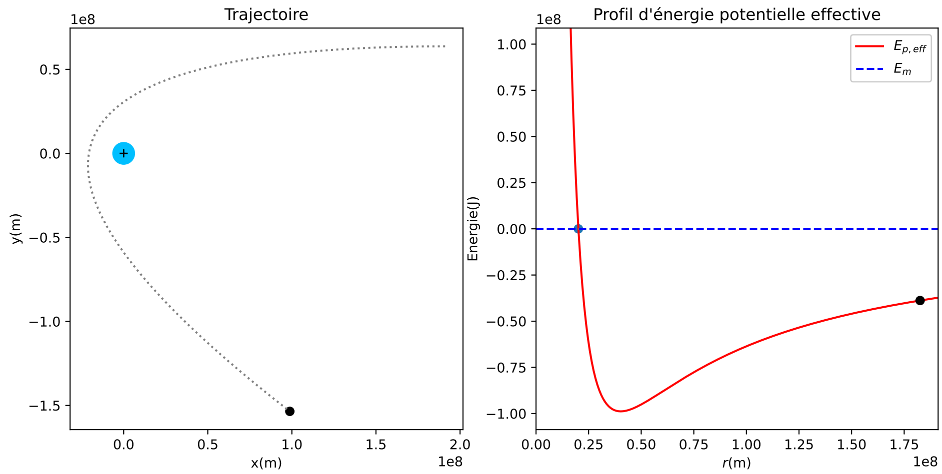
La trajectoire est *hyperbolique*. On peut montrer *(hors programme)* que cela est **du au fait que l'énergie mécanique est strictement positive**.

Voici ci-contre la trajectoire simulée de cette même météorite dans le cas où le paramètre d'impact aurait été diminué à $b = 1,5R_T$.

On comprend ainsi d'autant mieux l'appellation attribuée à b : **plus le paramètre d'impact est faible, plus la distance minimale d'approche r_{min} également**, et donc plus le risque d'une collision avec la Terre est grand …



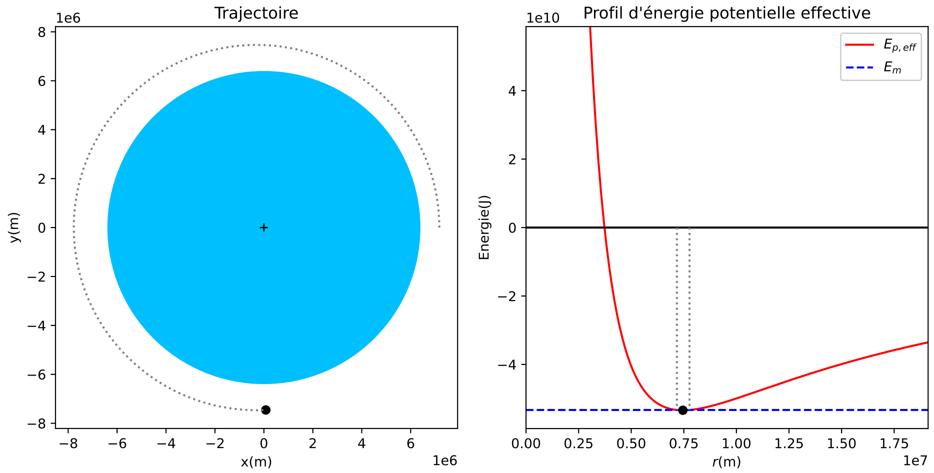
Trajectoire parabolique Imaginons un objet situé initialement extrêmement loin de la Terre et à vitesse initiale nulle dans le référentiel géocentrique. Alors, **l'énergie mécanique est nulle et on peut montrer dans ce cas que la trajectoire est *parabolique* :**



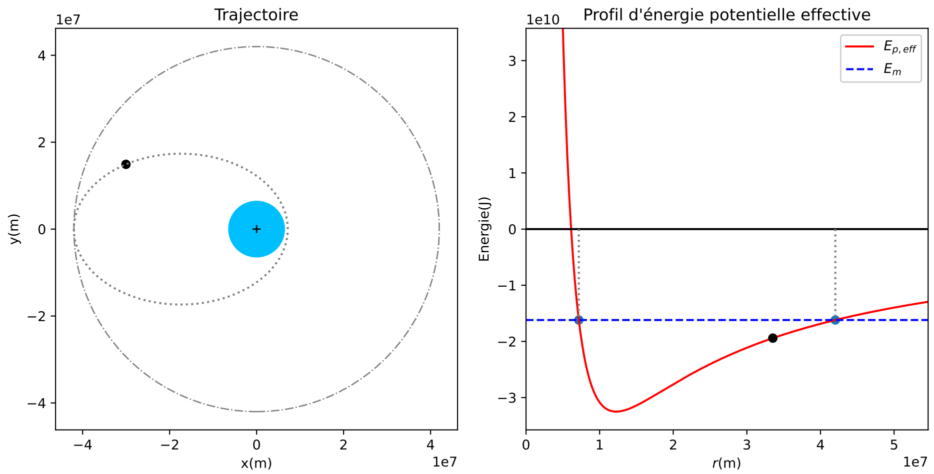
Doc

Cas d'un état lié

Trajectoire circulaire Exemple de l'orbite quasi-circulaire provisoire d'un satellite géostationnaire d'altitude 200 km de masse $m = 2,0$ t :



Trajectoire elliptique Orbite elliptique de *transfert* du satellite précédent lui permettant de rejoindre l'orbite circulaire géostationnaire d'altitude 36.10^3 km :



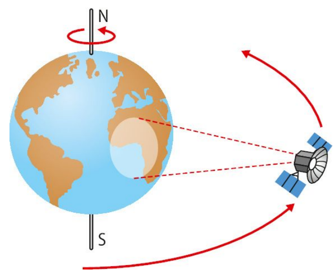
Document 4 Les satellites terrestres

La plupart des satellites terrestres ont une caractéristique commune : leurs orbites sont circulaires.

Satellites géostationnaires

Caractéristiques

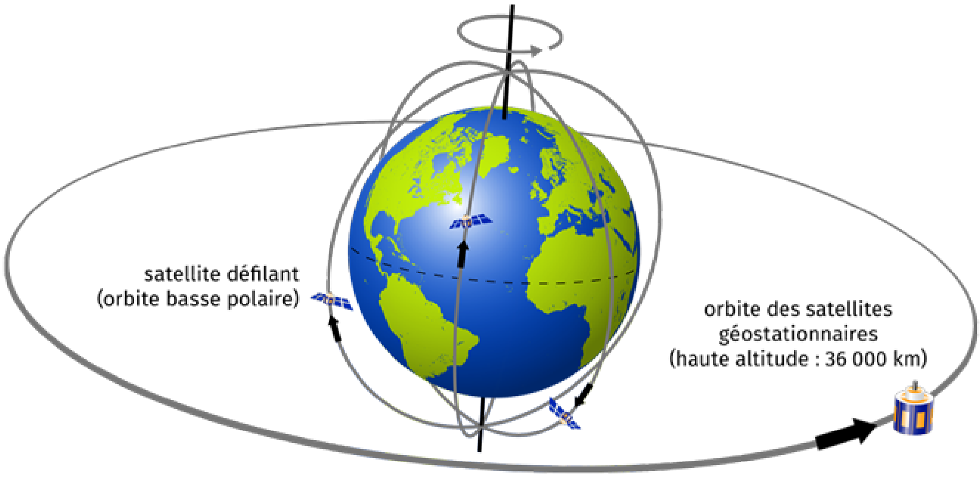
- ❑ Altitude d'environ 36 000 km et plan orbital confondu avec le plan de l'équateur.
- ❑ Période : une journée *sidérale* (23h56min04s) (et non pas une journée solaire de 24h...)
- ❑ Un unique satellite géostationnaire «voit» toujours le même disque terrestre (c'est d'ailleurs son intérêt) centré sur l'équateur.
  Maximisation de la la couverture : environ 550 satellites géostationnaires à la «queue-leu-leu» sur l'orbite géostationnaire.
- ❑ Couverture moins efficace à partir de 60°de latitude et régions polaires hors de portée.



Exemples d'applications

- ❑ Télécommunication
- ❑ Suivi des masses nuageuses en météorologie (perturbations des latitudes tempérées, systèmes orageux, cyclones tropicaux...)

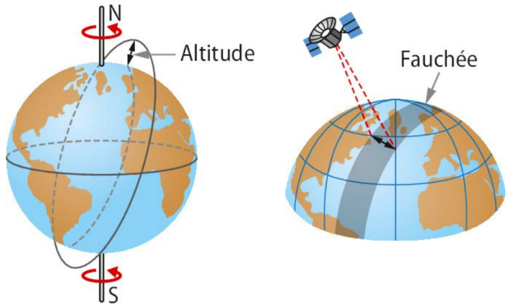
Doc



Satellites défilants (ou à défilement)

Caractéristiques

- ❑ La période (et donc son altitude) ainsi que l'inclinaison de l'orbite peut différer suivant la mission du satellite.
- ❑ L'inclinaison de l'orbite par rapport au plan de l'équateur est prononcée, voire très forte pour certaines missions : l'orbite du satellite et la rotation propre de la Terre se conjuguent ainsi pour assurer une bonne couverture de la surface terrestre.



Exemples d'applications

- ❑ Météorologie (sondage de température et d'humidité, etc) : satellites situés à environ 800 km, plan orbital incliné de 99°, période d'environ 100 min. Ces caractéristiques confèrent à l'orbite un caractère *héliosynchrone* (survol de régions situées sur un même parallèle toujours à la même heure solaire locale). De plus, le satellite peut passer deux fois par jour au-dessus de la même région.
- ❑ Téléphonie, réseau Iridium par exemple comprenant une constellation de 66 satellites à 780 km d'altitude.
- ❑ Géolocalisation par GPS : constellation de 24 satellites orbitant à 20 200km d'altitude, inclinaison de 55°

Ex

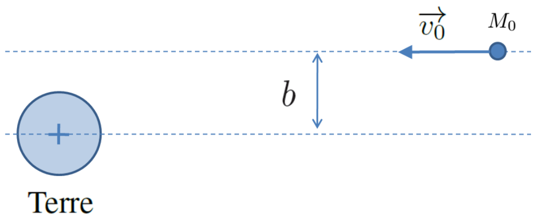
Exercices

Difficulté de l'exercice (analyse, «technicité», ...) Durée de l'exercice

Compétences travaillées	Exercices 1	2	3	4	5	6
Exprimer la constante des aires à l'aide des conditions initiales	•		•			•
Exprimer et exploiter l'énergie potentielle effective	•		•			
Exprimer et exploiter l'expression de la vitesse d'une planète ou satellite en orbite circulaire		•		•	•	
Exprimer et exploiter la troisième loi de Kepler		•				•
Exploiter la relation $E_m = -\frac{K}{2a}$				•	•	

Exercice 1 — Collision avec un astéroïde

Dans tout l'exercice, on ne considère que l'influence gravitationnelle de la Terre, assimilée à une sphère de masse M_T et de rayon R_T. Un astéroïde de masse m et de taille négligeable par rapport à celle de la Terre est repéré en M_0, à une distance très grande de la Terre où on supposera que son influence gravitationnelle est quasi-nulle. Dans cette position, le vecteur vitesse de l'astéroïde est $\vec{v_0} = v_0 \vec{u_x}$, porté par la droite $(M_0, \vec{u_x})$ telle que la distance minimale du centre de la Terre à cette droite est b, appelée paramètre d'impact.



1. Pourquoi l'énergie mécanique E_m et le moment cinétique de l'astéroïde sont-ils conservés ? On exprimera E_m et C (constante des aires) à l'aide des conditions initiales.

2. Donner l'expression de l'énergie potentielle effective $E_{p,eff}$ de l'astéroïde dans le champ gravitationnel de la Terre.

3. Exprimer la distance minimale r_{min} à laquelle l'astéroïde passe du centre de la Terre.

4. Apophis (découvert en 2004) est un astéroïde géocroiseur. Il croise l'orbite terrestre deux fois à chacune de ses révolutions autour du Soleil (chacune de ses révolutions dure 323 jours). Sa vitesse relative par rapport à la Terre est d'environ 5 km.s^{-1}. Quelle doit être la condition sur le paramètre d'impact b pour qu'il n'y ait pas de collision avec la Terre ?

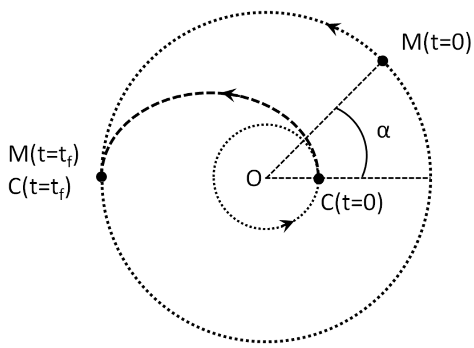
Exercice 2 — Robot *Curiosity*

On suppose que la Terre et Mars décrivent des orbites circulaires autour du Soleil (de centre O). Le rayon r_T de l'orbite terrestre est de 150.10^6 km. On notera T_T et T_M les périodes de révolution des deux planètes autour du Soleil, T_M étant 1,88 fois plus grand que T_T.

1. Déterminer la valeur du rayon r_M de l'orbite martienne et la vitesse v_M de rotation de la planète rouge autour du Soleil.

Le lancement du robot *Curiosity* de la mission *Mars Science Laboratory* (MSL) a eu lieu le samedi 26 novembre 2011, suivant une trajectoire semi-elliptique tangente aux orbites de la Terre et de Mars aux deux extrémités de son grand axe. On suppose que le robot n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle du Soleil. On assimile *Curiosity* et Mars à des points matériels notés C et M.

À l'instant $t = 0$ où les directions (OC) et (OM) sont séparées angulairement par une valeur adéquate α, le robot est placé sur une orbite de transfert elliptique spécifique permettant à *Curiosity* de rejoindre Mars à l'instant t_f.

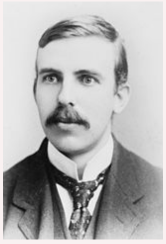


2. Quel sera la durée t_f nécessaire ?

3. Quelle doit être la valeur de α ?

Ex

Exercice 3 Expérience de Rutherford



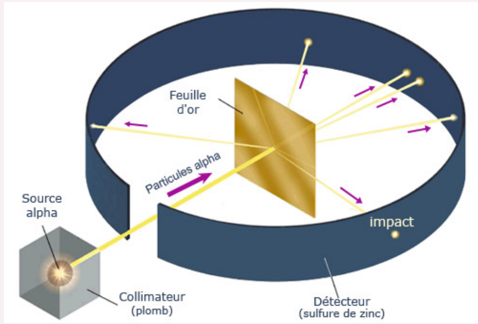
En 1908, Ernest Rutherford reçoit le prix Nobel pour l'identification des particules α à l'hélium. Lors de son discours Nobel, il est à même de préciser que ces atomes d'hélium sont doublement ionisés. Ce résultat fait sensation, car il est le résultat d'ultimes mesures faites avant son voyage en Suède.

Rutherford ne s'en tient pas là, il poursuit ses recherches sur les propriétés des rayonnements radioactifs. Dans la liste des expériences à faire après son retour de Stockholm, il a inscrit la diffusion des particules α.

En 1903, Philip Lenard, bombardant les atomes avec des rayons cathodiques [*ndp : faisceau d'électrons produit par une tension accélératrice*] avait remarqué que ceux-ci traversaient les atomes comme s'ils ne trouvaient presque rien sur leur trajet. Il avait résumé ses observations en disant qu'à l'échelle atomique « la matière solide est transparente » et remarqué que « l'espace occupé par un mètre cube de platine solide est aussi vide que l'espace séparant les étoiles de la terre ».
Observant que des particules α de très grande vitesse étaient déviées par une mince feuille de mica, Rutherford calcule le champ électrique à l'intérieur du mica et en déduit qu'il doit être très puissant.

Mais il faut pouvoir détecter et compter les particules α qui sont diffusées. Avec son assistant Hans Geiger, Rutherford met au point une méthode permettant de le faire. Le résultat de leurs observations confirme l'existence de champs électriques intenses. Reste tout de même une énigme : quelques particules α sont très déviées.

Rutherford demande à un jeune assistant Ernest Marsden de voir s'il y a des particules α qui subissent une forte déviation en traversant une mince feuille d'or et même rebondissent en arrière. C'est le cas ! C'est dans l'obscurité et à l'œil nu, que Rutherford, Geiger et Marsden comptent les scintillations dues aux impacts des particules α sur un écran de sulfure de zinc.



Bombardant de très fines feuilles d'or par des particules α (produit de la désintégration de radium ou polonium par exemple), Hans Geiger et Ernest Marsden, alors étudiants de Rutherford, observèrent qu'une fraction minime (1 sur 8000) de ces particules étaient défléchies à grand angle comme si elles rebondissaient sur un obstacle massif. Les impacts étaient observés dans l'obscurité au microscope sur un écran de sulfure de zinc scintillant. Rutherford en conclut que l'atome contenait un cœur massif, de charge électrique positive, capable de repousser les particules α.

Rutherford remarque dans une phrase devenue célèbre que tout se passe comme si vous bombardiez une feuille de papier avec un obus et que le projectile rebondit parfois vers vous. Il étudie le phénomène pendant une année et trouve l'explication : la charge positive des atomes se trouve dans un noyau massif et compact. Ce noyau concentre presque toute la masse de l'atome, mais n'occupe qu'une centaine de millionième de millionième de son volume. L'atome est vide, quasiment à cent pour cent.

Rutherford et Geiger

Source : http ://www.laradioactivite.com

1. Quelle phrase vous permet de comprendre que la charge d'une particule α est $q_\alpha = 2e$?

2. Exprimer E_0 l'énergie mécanique initiale d'une particule α, en fonction de sa masse m, r_{min} (distance minimale entre la particule α et le noyau d'or), C (constante des aires), le numéro atomique Z d'un atome d'or, e et la permittivité diélectrique du vide ϵ_0. En déduire l'expression de r_{min}.

3. L'ordre de grandeur du rayon du noyau atomique est de l'ordre de 10^{-15} m. En déduire pourquoi il était nécessaire d'utiliser des particules α de très grande vitesse pour pouvoir déceler l'existence du noyau atomique.

4. Rutherford utilisait des particules α d'énergie $E_0 = 5$ MeV environ (1 eV $= 1,6.10^{-19}$ J). Dans le cas d'une collison frontale, justifier que $C = 0$. En déduire l'ordre de grandeur de la distance minimale d'approche. Commenter alors la dernière phrase du document ci-dessus.
Données : $Z = 79$; $e = 1,6.10^{-19}$ C ; $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F.m^{-1} ; *taille d'un atome* $\simeq 10^{-10}$ m

5. Pourquoi les rayons cathodiques utilisés par Lenard ne pouvaient permettre de révéler l'existence du noyau atomique ?

Exercice 4 — Freinage d'un satellite

On s'intéresse à un satellite de masse m en orbite circulaire basse de rayon r autour de la Terre.

1. Établir l'expression de la norme de sa vitesse v en fonction de r.
2. Donner l'expression de l'énergie mécanique du satellite en fonction de r.

En réalité, le satellite est légèrement freiné par les hautes couches de l'atmosphère suivant une force de frottements $\vec{f} = -\alpha m v \vec{v}$ où α est un coefficient positif. Cette force est suffisamment faible pour considérer que l'orbite reste quasi-circulaire.

3. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique appliqué à un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ infinitésimal, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.
4. En déduire qualitativement l'effet des frottements sur le mouvement du satellite.
5. Un satellite situé sur une orbite à $1,0.10^3$ km d'altitude descend d'environ $2,0$ m par jour. En déduire une estimation de α.

Exercice 5 — Life : origine inconnue

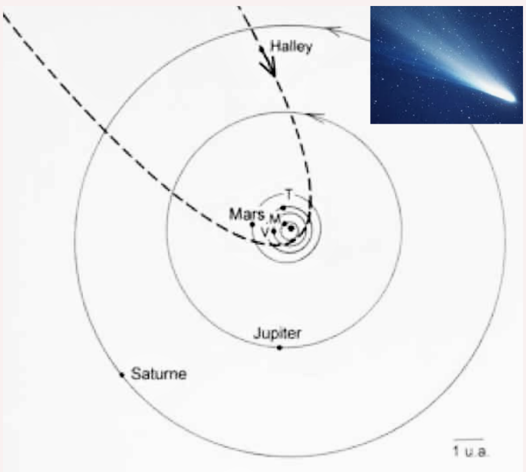
De la vie a été trouvée sur Mars ! Une sonde martienne a permis de ramener un organisme unicellulaire en état d'hibernation. Pour des raisons de sécurité évidentes, il est étudié dans la Station Spatiale Internationale et non pas sur la terre ferme. Mais l'organisme n'apprécie pas du tout les expériences menées à son encontre. Il parvient à se développer et à prendre une forme horrifique, par ailleurs il semble indestructible. Une solution pour s'en débarrasser serait de parvenir à le placer dans une capsule et l'envoyer dans les confins de l'espace.

Quelle variation de vitesse Δv minimale faudrait-il communiquer à la capsule pour cela ? L'ISS est en orbite circulaire à $h = 408$ km d'altitude. On note $R_T = 6371$ km le rayon terrestre et $m_T = 5,97.10^{24}$ kg la masse de la Terre.

Résolution de problème

Exercice 6 — Comète de Halley

D'après un article de Ciel et Espace : *Le 9 décembre 2023, la comète de Halley se trouve à 5,3 milliards de kilomètres du Soleil. Elle a atteint son point le plus lointain de son orbite (appelé aphélie). Après sa plus grande distance à la Terre le 29 juillet 2023, elle entame donc son retour vers le Système solaire interne. Mais comme elle se trouve au plus loin de son orbite très elliptique, elle se déplace très lentement : 0,9 km/s actuellement. Avec une période de 76 ans, la comète de Halley est la première dont le retour a été prédit par l'astronome britannique Edmund Halley, en 1705. La dernière fois qu'elle est passée relativement près de la Terre, c'était en 1985-86.*



On rappelle que la Terre évolue autour du Soleil sur une orbite quasi-circlaire de rayon une unité astronomique (150 millions de km). À quelle distance du Soleil sera située la comète une fois revenue à son périhélie (point le plus proche) ? Quelle sera sa vitesse ?