

Chapitre 7 : Mouvement d'un solide

LE COURS

A Quelques généralités sur la mécanique du solide

A.1	Qu'est-ce qu'un solide ?	1
A.2	Types de mouvement d'un solide	2
A.3	Théorème de la quantité de mouvement	3
A.4	Théorème de l'énergie cinétique	3
A.5	Théorème du moment cinétique	5

B Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

B.1	Position du problème	6
B.2	Notion de liaison pivot	7
B.3	Moment d'inertie du solide	7
B.4	Notion de couple	8

C Exemples

C.1	Le pendule pesant	10
C.2	Le pendule de torsion	10

D Approche énergétique des solides en rotation

D.1	Énergie cinétique de rotation	10
D.2	Expression du théorème de la puissance cinétique	10
D.3	Exemples	10

A Quelques généralités sur la mécanique du solide

A.1 Qu'est-ce qu'un solide ?

Définitions

- Contrairement à un fluide, un **solide** ne peut épouser les parois de son contenant.

Exemple

De l'eau liquide dans un verre épouse les parois du verre, alors que cela serait impossible pour un caillou, ou pour une éponge. Mais la différence avec une éponge, c'est qu'on peut la déformer en appuyant dessus, ou bien en la voyant se gorger de l'eau contenue dans le verre ... Il existe donc des solides déformables et d'autres indéformables.

- Conformément au programme de physique en CPGE, un *solide* est implicitement un système **indéformable** de points matériels, sauf mention contraire. Cela implique que tous les points constitutifs de ce système restent à distance constante les uns des autres :

$$\forall A, B \in \text{solide}, AB = \text{constante}$$

b. TPC et TEC pour un système de points

Théorème de la puissance cinétique (TPC)

En référentiel galiléen :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$$

où $\mathcal{P}_{ext} = \sum_i \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ext/i}) = \sum_i \overrightarrow{F}_{ext/i} \cdot \overrightarrow{v}_i$, résultante des puissances des forces extérieures,

et $\mathcal{P}_{int} = \sum_{(i,j \neq i)} \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{j/i}) = \sum_{(i,j \neq i)} \overrightarrow{F}_{j/i} \cdot \overrightarrow{v}_i$, résultante des puissances des forces intérieures.

Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

En référentiel galiléen :

$$\Delta E_c = W_{ext} + W_{int}$$

où $W_{ext} = \sum_i W(\overrightarrow{F}_{ext/i})$, résultante des travaux des forces extérieures,

et $W_{int} = \sum_{(i,j \neq i)} W(\overrightarrow{F}_{j/i})$, résultante des travaux des forces intérieures.

Démonstration Le TPC appliqué à un unique point matériel (voir chapitre **M3**) s'écrit :

$$\frac{dE_{c,i}}{dt} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ext/i}) + \sum_{j \neq i} \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{j/i})$$

En sommant sur i :

$$\sum_i \frac{dE_{c,i}}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ext/i}) + \sum_{(i,j \neq i)} \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{j/i})$$

$$\frac{d \sum_i E_{c,i}}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ext/i}) + \sum_{(i,j \neq i)} \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{j/i})$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ext/i}) + \sum_{(i,j \neq i)} \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{j/i})$$

Puis, en intégrant entre deux instants initial et final, on obtient sans difficulté le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum_i W(\overrightarrow{F}_{ext/i}) + \sum_{(i,j \neq i)} W(\overrightarrow{F}_{j/i})$$

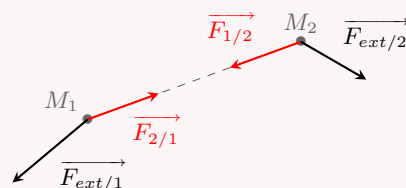
ATTENTION ! La puissance \mathcal{P}_{int} et le travail W_{int} ne sont pas nuls *a priori*!! Le principe des actions réciproques peut le laisser croire mais c'est faux. Voir démonstration effectuée dans le paragraphe suivant.

c. Cas d'un solide

Pour un solide (*implicitement indéformable*), la puissance \mathcal{P}_{int} et le travail W_{int} des forces intérieures sont nuls.

Démonstration

Dans le cas de deux points matériels M_1 et M_2 uniquement :





Exprimons la résultante des puissances des forces intérieures :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{int} &= \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{1/2}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{2/1}) \\
 &= \overrightarrow{F}_{1/2} \cdot \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{F}_{2/1} \cdot \overrightarrow{v}_1 \\
 &= \overrightarrow{F}_{1/2} \cdot \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{F}_{1/2} \cdot \overrightarrow{v}_1 \quad \text{d'après le principe des actions réciproques} \\
 &= \overrightarrow{F}_{1/2} \cdot \frac{d(\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1)}{dt} \\
 &= \overrightarrow{F}_{1/2} \cdot \frac{dM_1 M_2}{dt}, \quad \text{car } \overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{M_1 O} + \overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{M_1 M_2} \\
 &= F_{1/2} \overrightarrow{u}_{12} \cdot \frac{d(M_1 M_2 \overrightarrow{u}_{12})}{dt}, \quad \text{en notant } \overrightarrow{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2} \quad \text{et } \overrightarrow{F}_{1/2} = F_{1/2} \overrightarrow{u}_{12} \\
 &= F_{1/2} \overrightarrow{u}_{12} \cdot \left(\frac{dM_1 M_2}{dt} \overrightarrow{u}_{12} + M_1 M_2 \frac{d\overrightarrow{u}_{12}}{dt} \right)
 \end{aligned}$$

Or, $\overrightarrow{u}_{12} \cdot \frac{d\overrightarrow{u}_{12}}{dt} = \frac{d\frac{1}{2}\overrightarrow{u}_{12}^2}{dt} = \frac{d\frac{1}{2}}{dt} = 0$. D'où :

$$\mathcal{P}_{int} = F_{1/2} \frac{dM_1 M_2}{dt}$$

Généralisons aisément à N points matériels :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{int} &= F_{1/2} \frac{dM_1 M_2}{dt} + F_{1/3} \frac{dM_1 M_3}{dt} + F_{1/4} \frac{dM_1 M_4}{dt} + \dots + F_{2/3} \frac{dM_2 M_3}{dt} + F_{2/4} \frac{dM_2 M_4}{dt} + \dots \\
 \mathcal{P}_{int} &= \sum_{(i,j>i)} F_{i/j} \frac{dM_i M_j}{dt}
 \end{aligned}$$

Or, pour un solide, implicitement **indéformable**, $M_i M_j = \text{constante}$. D'où $\mathcal{P}_{int} = 0$. Et donc $\mathbf{W}_{int} = \mathbf{0}$, par intégration par rapport au temps.

A.5 Théorème du moment cinétique

a. Moment cinétique d'un système de points

Définition

Le moment cinétique du système de points $\{(M_1, m_1), (M_2, m_2), \dots\}$ par rapport à O est par définition la somme des moments cinétiques de chaque point :

$$\overrightarrow{L}_O = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \overrightarrow{v}_i$$

Soit un axe (Δ) auquel appartient O et orienté par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_\Delta$. Le moment cinétique de ce système par rapport à (Δ) est alors :

$$L_\Delta = \overrightarrow{L}_O \cdot \overrightarrow{u}_\Delta$$

b. TMC pour un système de points

Théorème du moment cinétique

En référentiel galiléen, si (Δ) et $O \in (\Delta)$ sont fixes, alors :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O,ext} \quad \text{et} \quad \frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta,ext}$$

où $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O,ext} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}_{ext/i})$ est la résultante des moments par rapport à O des forces extérieures agissant sur le système et $\mathcal{M}_{\Delta,ext} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O,ext} \cdot \overrightarrow{u}_\Delta$.

Démonstration Dans le cas de deux points matériels uniquement M_1 et M_2 , de moment cinétique $\vec{L}_O(M_i) = \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$, et auxquels s'appliquent des forces de résultantes $\vec{F}_{ext/i}$, on peut appliquer le TMC :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{L}_O(M_1)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext/1}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{2/1}) \\ \frac{d\vec{L}_O(M_2)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext/2}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{1/2}) \end{cases}$$

En sommant membre à membre :

$$\sum_i \frac{d[\vec{L}_O(M_1) + \vec{L}_O(M_2)]}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext/1}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext/2}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{2/1}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{1/2})$$

$$\frac{d\vec{L}_O(\text{systeme})}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{O,ext} + \vec{\mathcal{M}}_{O,int}$$

où $\vec{\mathcal{M}}_{O,ext} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext/1}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext/2})$ est la résultante des moments des forces extérieures, et la résultante des moments des forces intérieures vérifiant :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{O,int} &= \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{2/1}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{1/2}) \\ &= \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_{2/1} + \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_{1/2} \\ &= -\vec{M}_1 \vec{O} \wedge (-\vec{F}_{1/2}) + \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_{1/2} \\ &= (\vec{M}_1 \vec{O} + \vec{OM}_2) \wedge \vec{F}_{1/2} \\ &= \vec{M}_1 \vec{M}_2 \wedge \vec{F}_{1/2} \end{aligned}$$

Or, $\vec{M}_1 \vec{M}_2 \parallel \vec{F}_{1/2}$. D'où $\vec{\mathcal{M}}_{O,int} = \vec{0}$ et donc : $\frac{d\vec{L}_O(\text{systeme})}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{O,ext}$, résultat que l'on peut généraliser aisément à N points matériels.

En projetant suivant \vec{u}_Δ , avec $\vec{u}_\Delta = \text{constant}$ (car l'axe (Δ) est fixe) :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O(\text{systeme})}{dt} \cdot \vec{u}_\Delta &= \vec{\mathcal{M}}_{O,ext} \cdot \vec{u}_\Delta \\ \frac{d[\vec{L}_O(\text{systeme}) \cdot \vec{u}_\Delta]}{dt} &= \mathcal{M}_{\Delta,ext} \\ \frac{dL_\Delta(\text{systeme})}{dt} &= \mathcal{M}_{\Delta,ext} \end{aligned}$$

B Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

B.1 Position du problème

Soit un solide en mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen.

Le repérage le plus adapté est alors le repérage cylindrique en choisissant (Δ) comme axe Oz . Chaque point M_i est donc repéré par ses coordonnées cylindriques (r_i, θ_i, z_i) .

Notons que r_i et z_i sont des constantes.

À la manière des chevaux de bois d'un manège, tous les points M_i tournent nécessairement dans le même sens et à la même vitesse angulaire, notée $\Omega(t)$:

$$\forall i, \dot{\theta}_i(t) = \Omega(t)$$

Par contre, la distance à l'axe n'étant pas la même, les normes de vitesses ne seront pas les mêmes non plus. Notamment : $\vec{v}_i = r_i \Omega \vec{u}_\theta$

Notons que

- si $\Omega > 0$, le solide tourne suivant le sens **direct** associé à \vec{u}_Δ
- si $\Omega < 0$, le solide tourne suivant le sens **indirect** associé à \vec{u}_Δ



B.2 Notion de liaison pivot

Le contexte présenté précédemment peut être rendu possible en pratique grâce à une liaison pivot.

Définition

Une **liaison pivot** permet de relier deux solides entre eux et permettant à l'un d'être en rotation par rapport à l'autre suivant un axe donné, sans translation possible.

Ainsi, **un seul degré de liberté de rotation est permis**.

Exemples



5

À cause des actions de frottements entre les deux solides au sein de la liaison, ces actions occasionnent un moment scalaire résultant $\mathcal{M}_\Delta(\text{liaison pivot})$ par rapport à l'axe (Δ) s'opposant au mouvement de rotation :

- $\mathcal{M}_\Delta(\text{liaison pivot}) < 0$, si $\Omega > 0$;
- $\mathcal{M}_\Delta(\text{liaison pivot}) > 0$, si $\Omega < 0$.

Définition

Une **liaison pivot parfaite** est une liaison pivot pour laquelle $\mathcal{M}_\Delta(\text{liaison pivot}) = 0$. Les actions de contact de la liaison n'ont donc pas d'effet sur le mouvement de rotation du solide.

B.3 Moment d'inertie du solide

► Définition et propriété

Le moment cinétique scalaire d'un solide par rapport à un axe (Δ) est :

$$L_\Delta = J_\Delta \Omega$$

où $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$ est le **moment d'inertie** du solide par rapport à (Δ).

Démonstration Pour un point M_i du solide :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O(M_i) &= \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i \\ &= (r_i \vec{u}_r + z_i \vec{u}_z) \wedge m_i r_i \Omega \vec{u}_\theta \\ &= m_i r_i^2 \Omega \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta + m_i r_i z_i \Omega \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta \\ &= m_i r_i^2 \Omega \vec{u}_z - m_i r_i z_i \Omega \vec{u}_r \end{aligned}$$

En projetant suivant $\vec{u}_\Delta = \vec{u}_z$: $L_\Delta(M_i) = m_i r_i^2 \Omega$

D'où :

$$L_\Delta(\text{solide}) = \sum_i L_\Delta(M_i) = \sum_i m_i r_i^2 \Omega = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \Omega$$

$$L_\Delta(\text{solide}) = J_\Delta \Omega$$

NOTA BENE : l'expression de J_Δ d'un solide donné sera fournie en exercice.

L'expression $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$ ne sera donc pas utile, mais elle permet d'en déduire cette propriété à retenir :

Plus la masse est répartie loin de l'axe (Δ) (càd plus les distances r_i sont grandes), plus le moment d'inertie est important.

Exemples



6

► Expression du TMC pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Si le référentiel d'étude est galiléen et si l'axe (Δ) est fixe, le TMC scalaire énoncé au paragraphe **A.4** devient alors :

$$\frac{d(J_\Delta \Omega)}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, ext}$$

Or, puisque le solide est indéformable, les distances r_i sont constantes. Donc $J_\Delta = \text{constante}$. D'où :

$$J_\Delta \frac{d\Omega}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, ext}$$

Ce qui pourrait également s'écrire ainsi : $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\mathcal{M}_{\Delta, ext}}{J_\Delta}$.

Ainsi, plus le moment d'inertie sera important, moins les variations de $\Omega(t)$ seront significatives. Le moment d'inertie porte donc bien son nom : il reflète la capacité qu'a le solide de s'opposer aux variations de son mouvement de rotation autour d'un axe donné.

B.4 Notion de couple

Définition

Un couple est un ensemble de forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$, exercées sur un système et dont :

- la résultante est nulle : $\sum_k \vec{F}_k = \vec{0}$
- le moment résultant \mathbf{N} 'est **PAS** nul : $\sum_k \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_k) \neq \vec{0}$

Ainsi, un **couple** ne peut pas modifier le mouvement du centre de masse mais peut agir sur le mouvement de rotation du système.



Le moment vectoriel résultant d'un couple $\vec{\Gamma} = \sum_k \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_k)$ est indépendant du point de référence O choisi.

Démonstration Soient des forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ de points d'applications respectifs M_1, M_2, \dots et constituant un couple. Ainsi, par définition : $\sum_k \vec{F}_k = \vec{0}$.

Soient deux points de référence O et O' . Le moment résultant par rapport à O s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \sum_k \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_k) \\ &= \sum_k \vec{OM}_k \wedge \vec{F}_k \\ &= \sum_k (\vec{OO}' + \vec{O'M}_k) \wedge \vec{F}_k \\ &= \sum_k \vec{OO}' \wedge \vec{F}_k + \sum_k \vec{O'M}_k \wedge \vec{F}_k \\ &= \vec{OO}' \wedge \sum_k \vec{F}_k + \sum_k \vec{O'M}_k \wedge \vec{F}_k \\ &= \vec{OO}' \wedge \vec{0} + \sum_k \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_k) \\ &= \sum_k \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_k) \end{aligned}$$

Exemples





C Exemples

C.1 Le pendule pesant

(voir notes de cours manuscrites)

C.2 Le pendule de torsion

(voir notes de cours manuscrites)

D Approche énergétique des solides en rotation

D.1 Énergie cinétique de rotation

(voir notes de cours manuscrites)

D.2 Expression du théorème de la puissance cinétique

(voir notes de cours manuscrites)

D.3 Exemples

a. Pendule pesant

(voir notes de cours manuscrites)

b. Pendule de torsion

(voir notes de cours manuscrites)

c. Expérience du tabouret d'inertie

(voir notes de cours manuscrites)