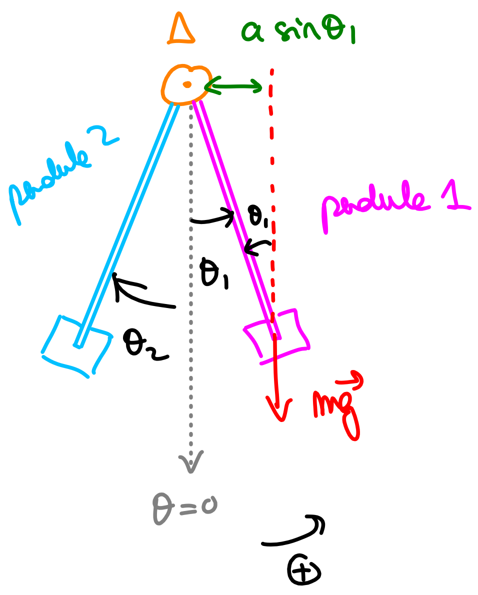
Pendules pesants couplés par une tige de torsion

1)



Appliquons le TMC au pendule 1 :

$$J\dot{\Omega}_1 = \mathcal{M}_\Delta(\text{poids}) + \Gamma_{tige/1}$$

$$J\dot{\Omega}_1 = -mga\sin\theta_1 \pm C(\theta_2-\theta_1)$$

+ ou − ?

Lorsque $\theta_2 = \theta_1$: la tige n'est pas tordue car elle n'exerce aucun couple

Lorsque $\theta_2 < \theta_1$ (cas du schéma ci-dessus) : la tige de torsion est tordue et tend à ramener le pendule 1 vers le pendule 2 (bon sens physique)

La tige agit donc sur le pendule 1 suivant le sens indirect associé à $\vec{u_\Delta}$.

Donc $\Gamma_{tige/1} < 0$ lorsque $\theta_2 < \theta_1$
$\iff \theta_2 - \theta_1 < 0$

d'où, nécessairement :

$$\boxed{\Gamma_{tige/1} = C(\theta_2-\theta_1)}$$

Lorsque $\theta_1 < \theta_2$: même raisonnement mais désormais

$\Gamma_{tige/1} > 0$ et $\theta_2 - \theta_1 > 0$ d'où $\boxed{\Gamma_{tige/1} = C(\theta_2-\theta_1)}$

AINSI : $J\underbrace{\dot{\Omega}_1}_{=\ddot{\theta}_1} = -mga\sin\theta_1 + C(\theta_2-\theta_1)$

Considérons $|\theta_1| \ll 1 \Rightarrow \sin\theta_1 \simeq \theta_1$:

$$\boxed{J\ddot{\theta}_1 + mga\,\theta_1 + C(\theta_1-\theta_2) = 0} \quad (1)$$

De même pour le pendule 2 :

$$\boxed{J\ddot{\theta}_2 + mga\,\theta_2 + C(\theta_2-\theta_1) = 0} \quad (2)$$

(mêmes raisonnements, il suffit juste d'intervertir les indices)

2) Effectuons (1) + (2) :

$$J(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2) + mga(\theta_1+\theta_2) = 0$$

$$J\ddot{u} + mga\,u = 0$$

$$\boxed{\ddot{u} + \omega_A^2 u = 0 \quad , \quad \text{où} \quad \omega_A = \sqrt{\frac{mga}{J}}}$$

$= \omega_0$, pulsation propre de chaque pendule SEUL

càd ↳ cas $C = 0$ (pas de tige de torsion)

Effectuons (1) − (2) :

$$J(\ddot{\theta}_1-\ddot{\theta}_2) + (mga+2C)(\theta_1-\theta_2) = 0$$

$$J\ddot{v} + (mga+2C)\,v = 0$$

$$\boxed{\ddot{v} + \omega_B^2 v = 0 \quad , \quad \text{où} \quad \omega_B = \sqrt{\frac{mga+2C}{J}}}$$

3) Solutions de la forme :

$$\boxed{\begin{cases} u(t) = A\cos(\omega_A t + \varphi_A) \\ v(t) = B\cos(\omega_B t + \varphi_B) \end{cases}}$$

$\theta_1 = \dfrac{u+v}{2}$

$\theta_2 = \dfrac{u-v}{2}$

4) $$\begin{cases} \theta_1(t) = \dfrac{A}{2}\cos(\omega_A t + \varphi_A) + \dfrac{B}{2}\cos(\omega_B t + \varphi_B) \\ \theta_2(t) = \dfrac{A}{2}\cos(\omega_A t + \varphi_A) - \dfrac{B}{2}\cos(\omega_B t + \varphi_B) \end{cases}$$

On obtient θ_1 et θ_2 par superposition de fonctions sinusoïdales de fréquences voisines d'où un phénomène de battements de pulsation :

$$\omega_{batt} = \omega_B - \omega_A$$

⊕ Effet d'amortissement non pris en compte dans le modèle ...

5) $$\omega_{batt} = \omega_B - \omega_A$$

$$= \sqrt{\frac{mga}{J} + \frac{2C}{J}} - \omega_0 \qquad \left(\text{où } \omega_0 = \omega_A = \sqrt{\frac{mga}{J}} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{mga}{J}}\sqrt{1 + \frac{2C}{mga}} - \omega_0$$

$$\omega_{batt} = \omega_0 \left(1 + \frac{2C}{mga}\right)^{1/2} - \omega_0$$

$= \varepsilon \ll 1$

D'où $\omega_{batt} \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \omega_0$

Rappel

$(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$

si $|\varepsilon| \ll 1$

$$\simeq \omega_0 \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{2\pi}{T_{batt}} \simeq \frac{2\pi}{T_0} \frac{C}{mga}$$

Donc :

$$\boxed{C \simeq mga \frac{T_0}{T_{batt}}}$$

" Oui ... et alors ? ... "

En mesurant m, a, T_0 et T_{batt}, on peut en déduire une mesure de C par exemple ...