Chapitre 7 : Mouvement d'un solide

Prérequis

- chapitres de mécanique **M1 M2 M3**
- chapitre **M5 - Théorème du moment cinétique**

Mots-clés

solide indéformable, liaison pivot, moment d'inertie, pendule pesant, couple de torsion, pendule de torsion

Plan du cours

S s f

Les savoirs et les savoir-faire

A Quelques généralités sur la mécanique du solide

Capacités exigibles

- Différencier un solide d'un système déformable.
- Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
- Théorème de l'énergie cinétique : prendre en compte le travail des forces intérieures ; utiliser sa nullité dans le cas d'un solide.

A.1 Qu'est-ce qu'un solide ?

1. Donner la définition d'un solide indéformable.

A.2 Types de mouvement d'un solide

2. Qu'est-ce qu'un mouvement de translation ?
3. Donner des exemples concrets de translation rectiligne, curviligne, circulaire, elliptique.
4. Qu'est-ce qu'un mouvement de rotation ? Quelle différence faites-vous avec une translation circulaire ? Donner un exemple.

A.3 Théorème de la quantité de mouvement

5. Énoncer le théorème de la quantité de mouvement (ou 2ème loi de Newton) appliqué à un ensemble de points matériels.
6. Que permet-il d'étudier ?

A.4 Théorème de l'énergie cinétique

7. Définir l'énergie cinétique d'un ensemble de points matériels $\{(M_1, m_1), (M_2, m_2), ...\}$
8. Expliquer alors comment doit s'écrire le TPC et le TEC pour un système de points en distinguant le travail des forces extérieures et le travail des forces intérieures.
9. Que dire de $\mathcal{P}_{int}$ et W_{int} dans le cas d'un solide indéformable ? (donner le résultat, démonstration non-exigible) Comment s'écrivent alors le TPC et le TEC ?
10. Cas particulier d'un solide **en translation** de vitesse $v = ||\vec{v}||$: comment s'écrit l'énergie cinétique du solide ?

A.5 Théorème du moment cinétique

11. Définir le moment cinétique d'un système de points.
12. Énoncer le théorème du moment cinétique pour un système de points. Que dire du moment résultant des forces intérieures ?

B Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Capacités exigibles

- Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
- Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
- Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
- Définir un couple.
- Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
- Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.

B.1 Position du problème

13. Préciser le repérage et les notations employées.
14. Que dire de la vitesse angulaire des points constitutifs du solide ?

B.2 Notion de liaison pivot

15. Qu'est-ce qu'une liaison pivot ? Que dire du moment qu'elle peut produire sur le solide ?
16. Que dire d'une liaison pivot *parfaite* ?

B.3 Moment d'inertie du solide

17. Définir le moment d'inertie d'un système de points par rapport à un axe fixe. Comment s'écrit alors le moment cinétique scalaire en fonction de la vitesse angulaire ? (expression à établir)
18. Que dire du moment d'inertie d'un solide indéformable ?
19. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
20. Exprimer le **théorème du moment cinétique dans le cas d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe**.

B.4 Notion de couple

21. Définir un couple de forces.
22. Montrer que le moment résultant d'un couple est indépendant du point de référence.

C Exemples

Capacités exigibles

- Établir l'équation du mouvement pour le pendule pesant et le pendule de torsion.

C.1 Le pendule pesant

23. Établir l'équation différentielle décrivant les oscillations du pendule. Identifier la période des oscillations.

C.2 Le pendule de torsion

24. Quelle est l'expression du couple de torsion exercée par un fil de torsion ?
25. Établir l'équation différentielle décrivant les oscillations du pendule. Identifier la période des oscillations.

D Approche énergétique des solides en rotation

Capacités exigibles

- Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
- Établir l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.
- Pendule pesant et pendule de torsion : établir une intégrale première du mouvement.
- Conduire le bilan énergétique du tabouret d'inertie.

D.1 Énergie cinétique de rotation

26. Établir l'expression l'énergie cinétique de rotation du solide en fonction du moment d'inertie et de la vitesse angulaire.

D.2 Expression du théorème de la puissance cinétique

27. À partir du théorème du moment cinétique, en déduire le théorème de la puissance cinétique pour un solide indéformable. Quelle est l'expression de la puissance d'une force en fonction de son moment cinétique scalaire et de la vitesse angulaire ?

D.3 Exemples

28. Pendule pesant : retrouver l'équation différentielle du mouvement en passant par l'intégrale 1ère du mouvement.

29. Pendule de torsion : mettre en évidence l'existence d'une énergie potentielle de torsion et retrouver l'équation différentielle du mouvement en passant par l'intégrale 1ère du mouvement.

30. Expérience du tabouret d'inertie : expliquer la modification de la vitesse angulaire observée. Discuter du travail des forces intérieures.

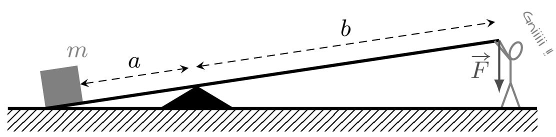
Exercices

Difficulté de l'exercice (analyse, «technicité», ...) — Durée de l'exercice

Compétences travaillées	Exercices 1	2	3	4	5	6	7
Appliquer et exploiter le théorème du moment cinétique	•	•	•	•	•	•	•
Exprimer le moment d'une force à l'aide du bras de levier	•	•			•		•
Approche énergétique d'un solide en rotation		•	•			•	
Pendule(s) pesant(s)					•	•	
Couple de torsion					•		
Solide déformable, prise en compte du travail des forces intérieures			•			•	

Exercice 1 Esclave de l'égypte antique

Un esclave égyptien du temps des pharaons et de masse $m_e = 80$ kg doit parvenir à soulever un énorme bloc de pierre de masse $m = 400$ kg sous l'effet de son propre poids à l'aide d'une barre supposée suffisamment rigide de $6,0$ m de long. On modélisera le bloc de pierre par une masse ponctuelle et on considère qu'il applique une force $\vec{F}$ de manière verticale à l'extrémité de la barre servant de levier.



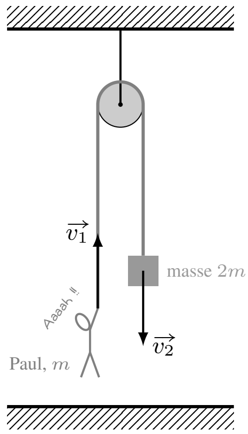
1. Quelle relation doivent vérifier la norme F de la force, a, b et m ?
2. Que doit également vérifier F afin que l'esclave reste en contact avec le sol ?
3. Quelle doit être la distance entre l'égyptien et l'axe de rotation ?

Exercice 2 Soulèvement d'une masse à l'aide d'une poulie

Pierre et Paul de masse $m = 75$ kg chacun soulèvent une caisse à l'autre extrémité d'une corde contenant la collection de verres en cristal de Paul, de masse $2m = 150$ kg. La corde est enroulée sur une poulie de rayon $R = 20$ cm et de moment d'inertie $J = 0,10$ kg.m^2 par rapport à son axe de rotation. On note $\Omega(t)$ la vitesse angulaire de la poulie. La liaison pivot est supposée parfaite.

À l'instant $t = 0$, Pierre, arachnophobe, constate qu'une petite araignée se déplace sur sa manche : pris de panique, il lâche alors instantanément la corde. Afin de limiter la chute de la masse, Paul décide de ne pas lâcher la corde. À partir de cet instant, on s'intéresse au destin de Paul d'altitude $z_1(t)$. On note $z_2(t)$ l'altitude de la masse $2m$. On notera également $v_1 = \dot{z}_1$ et $v_2 = \dot{z}_2$.

On admet que la norme de la tension du brin de corde de droite auquel est rattachée la masse est constante le long de ce brin, notée T_d. De même pour le brin de gauche auquel est accroché Paul et on notera T_g la norme correspondante.



1. Exprimer $\dot{\Omega}$ à l'aide notamment de T_g et T_d.
2. À l'aide de la 2ème loi de Newton, établir l'équation différentielle vérifiée par $v_1(t)$. Faire de même pour $v_2(t)$.
3. Quelle relation simple existe-t-il entre v_1 et v_2 ? entre v_1 et Ω ?
4. À quelle accélération l'ascension soudaine de Paul s'effectuera-t-elle ?
5. Pierre et Paul avaient pu élever la masse jusqu'à une hauteur $H = 5,0$ m avant que l'araignée ne fasse son apparition. Quelle sera la vitesse finale v_f atteinte par Paul juste avant que la masse ne touche le sol ?

Exercice 3 Tabouret d'inertie

Une personne est assise sur un tabouret dont le siège peut tourner quasiment sans frottement autour d'un axe vertical Δ. Elle porte deux haltères identiques à chaque main. La personne est mise en rotation à la vitesse angulaire Ω_1, les bras tendus horizontalement. Puis, elle replie les bras et on observe que sa rotation se fait à une vitesse différente $\Omega_2 > \Omega_1$.

Situation 1

Situation 2

1. Dans les états 1 et 2, le système possède respectivement un moment d'inertie J_1 et J_2 par rapport à l'axe de rotation Δ. Comparer J_1 et J_2.
2. Justifier que le moment cinétique scalaire L_Δ du système personne-siège n'a pas varié au cours de cette opération.
3. Pourquoi observe-t-on une augmentation de la vitesse angulaire lorsque les bras se replient ? Pourquoi l'expérience est-elle plus spectaculaire si la personne tient dans ses mains des haltères ?
4. En étudiant le rapport des énergies cinétiques $\dfrac{E_{c1}}{E_{c2}}$, déterminer si l'énergie cinétique a augmenté ou diminué au cours de cette opération. Que peut-on en déduire pour l'énergie mécanique ? Comment expliquer cela ?

Exercice 4 Intérêt d'un volant d'inertie

D'après un article Wikipedia : *Les concasseurs, pour fabriquer du gravier, sont entraînés par des moteurs électriques dont le fonctionnement est très régulier. Cependant, les rochers broyés imposent en fonction de leur taille ou de leur forme des contraintes soudaines et violentes qui pourraient faire caler le moteur. L'énergie cinétique stockée dans le volant [d'inertie] permet le passage des points durs rencontrés par le concasseur.*

Le but de cet exercice est d'étudier l'impact du volant d'inertie sur le fonctionnement d'une machine tournante autour d'un axe fixe (Δ) par l'action d'un couple moteur. Le solide en rotation possède un moment d'inertie J par rapport à l'axe (Δ) et sa vitesse angulaire autour de (Δ) est notée $\Omega(t)$.
On suppose que l'ensemble des forces de frottements subies par le solide en rotation peut être représenté par un couple de frottements de moment $-k\Omega$ par rapport à l'axe de la machine, où k est une constante positive.

Initialement immobile, la machine est soumise à partir de l'instant $t = 0$ à l'action d'un couple moteur de moment Γ_0 constant.

1. Déterminer l'équation du mouvement de l'outil vérifiée par $\Omega(t)$. On introduira une constante de temps τ.
2. Résoudre l'équation et identifier la vitesse angulaire Ω_0 atteinte en régime permanent.
   Tracer qualitativement $\Omega(t)$.

Afin de prendre en compte les perturbations du couple moteur évoquées dans l'article, on peut considérer que tout se passe comme si la machine était soumise à un couple total $\Gamma_0 + \Gamma_p(t)$, où $\Gamma_p(t)$ représente une perturbation par rapport au couple Γ_0 désiré.

3. On considère une perturbation sinusoïdale $\Gamma_p(t) = \Gamma_1 \cos(\omega t)$. Justifier cette approche.
4. Justifier que l'on puisse chercher $\Omega(t)$ sous la forme $\Omega(t) = \Omega_0 + \Omega_p(t)$ où $\Omega_p(t) = \Omega_1 \cos(\omega t + \varphi)$. Établir alors l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\Omega_p(t)$.
5. Exprimer l'amplitude Ω_1 en fonction de ω.
6. Expliquer l'intérêt des deux volants d'inertie visibles sur la photographie ci-dessus.

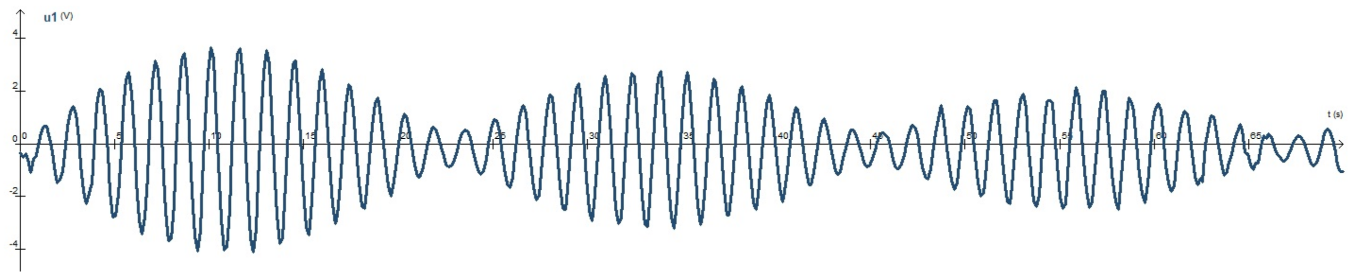
Exercice 5 Pendules pesants couplés par une tige de torsion

Soient deux pendules pesants identiques de moment d'inertie J par rapport à leur axe Δ de rotation mis en commun à l'aide d'une tige de torsion. On note $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ la position angulaire de chaque pendule par rapport à la verticale descendante. Chaque pendule est de masse m, le centre de masse étant situé à une distance a depuis l'axe Δ. La tige est caractérisée par une constante de torsion C et exerce ainsi un couple de torsion $\pm C(\theta_2 - \theta_1)$ sur chaque pendule. On néglige tout frottement.

1. Établir le système d'équations différentielles couplées vérifiée par $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.
2. Avec le changement d'inconnues $u = \theta_1 + \theta_2$ et $v = \theta_1 - \theta_2$, montrer que :

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_A^2 u &= 0 \\ \ddot{v} + \omega_B^2 v &= 0 \end{cases}$$

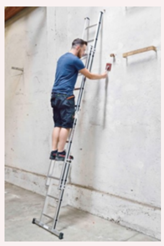
   On exprimera les pulsations propres ω_A et ω_B à l'aide des paramètres physiques du problème.
3. Quelles sont les expressions générales de $u(t)$ et $v(t)$?
4. Des capteurs potentiométriques permettent d'observer l'évolution de $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$. Commenter l'acquisition du signal délivré par le capteur 1 ci-dessous.



5. On considère que $2C \ll mga$ et que les frottements sont négligeables.
   Montrer que $C \simeq mga\dfrac{T_0}{T_{batt}}$ où T_0 représente la période propre de chaque pendule seul (sans couplage par la tige de torsion) et T_{batt} est la période des battements observés.

Résolution de problème

Exercice 6 Echelle contre un mur



Une échelle est posée contre un mur vertical, son autre extrémité reposant sur le sol horizontal. Il n'y a pas de frottement entre l'échelle et le mur. Le coefficient de frottement entre l'échelle et le sol est f.

Quelles conditions l'utilisateur doit-il respecter, s'il veut éviter que l'échelle glisse sur le sol ?