



LE COURS

A	Incertitude d'une mesure	
A.1	Variabilité de la mesure	2
A.2	Incertitude-type	2
B	Réalisation d'une mesure directe	
B.1	Méthode de type A : avec variabilité observée	4
B.2	Méthode de type B : sans variabilité observée	6
C	Réalisation d'une mesure indirecte	
C.1	Incertitude-type composée	7
C.2	Méthode Monte-Carlo	10
D	Comparaison de deux mesures	
D.1	Usage de l'écart normalisé	13
D.2	Cas d'une comparaison à une valeur de référence	16
E	Régressions linéaires	
E.1	Réaliser et analyser une modélisation affine	17
E.2	Visualisation et analyse des résidus	20
E.3	Incertitudes sur les paramètres d'ajustement affine	21

A Incertitude d'une mesure



CAPACITÉS EXIGIBLES

- ✦ Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure
- ✦ Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure

A.1 Variabilité de la mesure

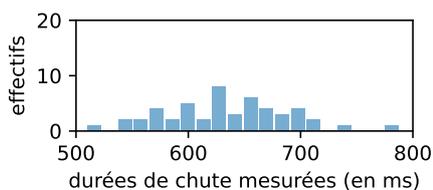
Qu'est-ce qu'une mesure ?

A priori, mesurer consiste à attribuer une valeur numérique à une grandeur physique. Mais la **variabilité de la mesure** engendre une **incertitude de mesure**. Il sera donc nécessaire de considérer que le résultat de la mesure d'une grandeur n'est pas une valeur unique mais un ensemble de valeurs numériques raisonnablement attribuables à cette grandeur.

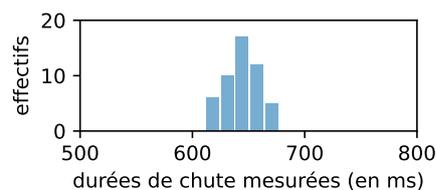
Causes de variabilité	Exemples
l'instrument de mesure	Deux voltmètres de même modèle et provenant du même fabricant peuvent fournir une mesure différente d'une même tension. Par ailleurs, ce type d'appareil est sensible au bruit électronique ce qui perturbe la mesure.
les variations de l'environnement dans lequel est effectuée la mesure	Les fluctuations de température au cours de la mesure de la célérité du son dans l'air peut donc engendrer de la variabilité.
la méthode de mesure employée	La mesure du champ de pesanteur terrestre g peut s'effectuer en mesurant le temps de chute d'une balle ou bien la période d'un pendule par exemple. Les approximations effectuées dans le modèle expérimental pour l'une ou l'autre méthode peuvent engendrer de la variabilité.
l'expérimentateur lui-même, c'est d'ailleurs très souvent la principale cause !	L'expérimentateur peut se tromper lors du placement d'une règle pour mesurer une longueur, ou bien lorsque il doit démarrer et arrêter le chronomètre au bon moment pour mesurer une durée, ou bien lorsqu'il doit placer convenablement un écran pour observer une image nette se formant sur celui-ci, etc.

A.2 Incertitude-type

Prenons l'exemple de la mesure du temps τ de chute d'une balle sur une hauteur de 2 mètres par deux méthodes différentes, en répétant le processus de mesure 50 fois (par exemple) pour chacune des deux méthodes :



(a) Mesure au chronomètre



(b) Mesure par chronophotographie

Dans les deux cas, l'estimation de la durée τ est située aux environs de 640 ms. Mais la variabilité de la mesure est moindre avec la 2ème méthode, octroyant ainsi une meilleure précision à la mesure.

Il apparaît donc nécessaire de parvenir à quantifier la variabilité de la mesure.

B Réalisation d'une mesure directe



CAPACITÉS EXIGIBLES

- ✦ Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A)
- ✦ Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B)
- ✦ Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale

B.1 Méthode de type A : avec variabilité observée

On appliquera la méthode de type A si la variabilité de la mesure est clairement constatée lorsque le même processus de mesure avec le même matériel est répété.

Les N répétitions de la mesure engendrent ainsi N valeurs différentes x_1, x_2, \dots

L'incertitude-type serait alors : $u(x) = s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$ avec $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ (moyenne)

(R) On choisit ici l'écart-type dit **expérimental** (ou de l'échantillon) noté s_x faisant apparaître un facteur $\frac{1}{N-1}$ plutôt que

l'écart-type $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$, afin de ne pas être tenté de ne prendre qu'une seule valeur (en effet, on tomberait sur une forme indéterminée 0/0).

Par ailleurs, il est possible de montrer que s_x , plutôt que σ , est un meilleur estimateur de l'écart-type de la distribution probabiliste de la variable aléatoire associée à la grandeur mesurée.

Quelle valeur faudrait-il attribuer à x ?

Bien évidemment, il est très tentant de choisir la moyenne \bar{x} des mesures x_1, x_2, \dots obtenues afin d'amoindrir l'impact des fluctuations dues à la variabilité de la mesure. Mais attention, dans ce cas, l'expérience n'est plus : « j'effectue **une unique** mesure de la grandeur x » (qui a été répétée N fois pour estimer l'incertitude-type associée à cette expérience) mais plutôt : « j'effectue N répétitions de la mesure de la grandeur x et je calcule la moyenne correspondante \bar{x} ». Ainsi, pour évaluer l'incertitude-type associée à cette nouvelle expérience, il faudrait répéter N' fois cette nouvelle expérience, c'est-à-dire effectuer N' répétitions de N répétitions de la grandeur x , puis calculer l'écart-type correspondant à l'ensemble des N' moyennes de x obtenues. Très chronophage donc ! Heureusement, on peut gagner du temps en ne se servant que d'une seule série de N mesures, grâce à un théorème mathématique qui, sous certaines conditions presque toujours vérifiées en pratique, stipule que : $u(\bar{x}) \simeq \frac{s_x}{\sqrt{N}}$

Voici donc ce que l'on retiendra :

Méthode de type A

Lorsque la variabilité de la mesure est observée par répétition du processus de mesure, on effectue N mesures de la grandeur x . Le résultat de la mesure est donc :

$$x = \text{valeur moyenne } \bar{x} \quad , \quad u(x) = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

(R) En pratique, en rentrant ces N valeurs dans la calculatrice, celle-ci fournira directement la valeur de s_x et de \bar{x} . Par contre, il faudra calculer soi-même $\frac{s_x}{\sqrt{N}}$.

Exemple

Pour mesurer la distance focale f' d'une lentille convergente, on cherche à former une image nette sur un écran en déplaçant l'écran et la lentille (l'objet reste fixe). Lorsque l'image paraît nette, on mesure la distance d_O entre l'objet et la lentille, ainsi que d_E , distance entre l'écran et la lentille.



On peut alors en déduire f' à l'aide de la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{d_E} - \frac{1}{-d_O} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{d_O + d_E}{d_O d_E} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{d_O d_E}{d_O + d_E}$$

L'appréciation de la netteté est responsable de la variabilité de la mesure. On peut s'en rendre compte en répétant le processus de mesure plusieurs fois. On obtient les valeurs ci-dessous. **Calculer la valeur de f' manquante.**

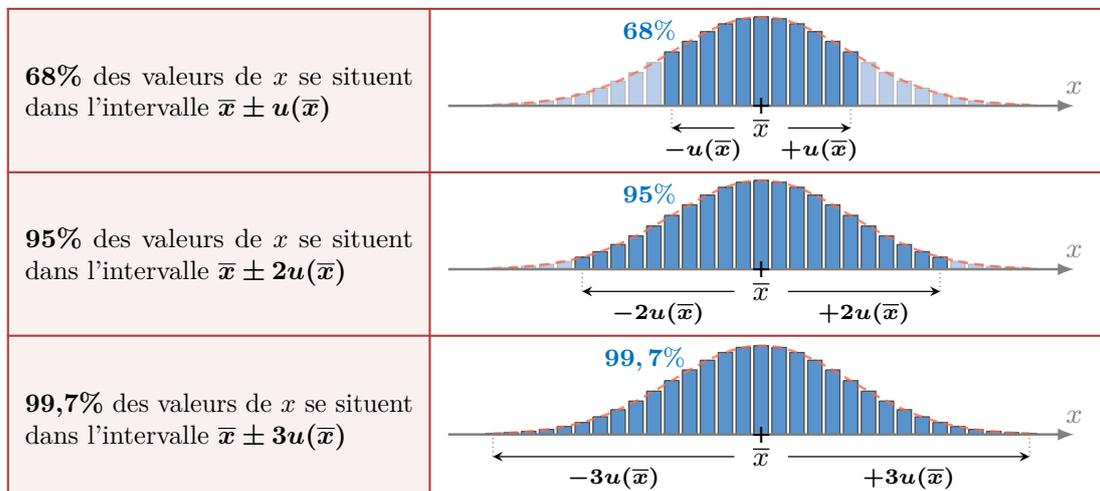
d_O (mm)	793	276	806	284	816	275	823	273	274	820
d_E (mm)	264	768	257	728	264	780	257	781	761	258
f' (mm)	198	203	195	204	199	203	196	202	201	

Quelle mesure de f' peut-on déduire de ce tableau ?



► Degré de confiance dans le cas particulier d'une loi normale

Si on sait que les valeurs de x se dispersent en suivant une **loi normale** (ou **gaussienne**), alors on peut affecter un **degré de confiance** à la mesure suivant la valeur d'incertitude que l'on choisit de mettre en avant :



Ainsi, plus on élargit l'incertitude de mesure (en prenant une, deux ou trois fois l'incertitude-type), plus la confiance est bonne, mais donc au détriment de la précision de la mesure (puisque la valeur de l'incertitude choisie est plus grande).

C.2 Méthode Monte-Carlo

a) Principe général d'une simulation Monte-Carlo

► Effectuer des tirages aléatoires

Dans le cas général, le calcul de l'incertitude-type composée $u(z)$ peut être très complexe et inutilement chronophage. C'est par exemple le cas lorsque des fonctions transcendantes interviennent dans l'expression de la grandeur $z = f(x, y, \dots)$.

On préférera alors utiliser une **simulation Monte Carlo** permettant de simuler informatiquement la variabilité des différentes grandeurs mises en jeu (x, y, \dots) en effectuant des **tirages aléatoires** de ces grandeurs et ainsi **simuler la variabilité de z , puis en déduire l'incertitude-type $u(z)$** .

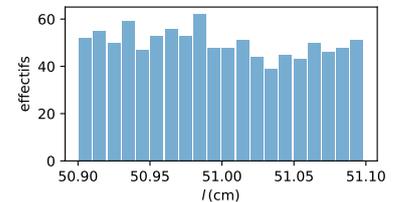
► Quelle loi de probabilité choisir lors des tirages aléatoires des grandeurs x, y, \dots ?

Loi normale/gaussienne	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> lorsque la méthode de type A a été employée pour mesurer directement la grandeur x ou y considérée <input type="checkbox"/> lorsque l'on connaît la valeur mesurée et l'incertitude-type associée, mais qu'on ne connaît pas la distribution sous-jacente
Loi rectangulaire/uniforme	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> lorsque la méthode de type B a été employée pour mesurer directement la grandeur x ou y considérée <input type="checkbox"/> lorsqu'on n'a aucune autre information qu'une limite basse x_{min} et une limite haute x_{max} pour la grandeur d'intérêt x (cela revient donc à suivre la méthode de type B ...)

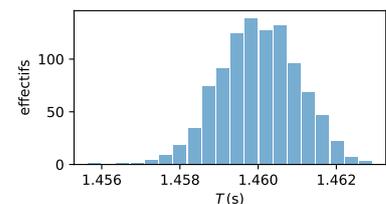
► Exemple

Reprenons l'exemple 4 du paragraphe **C.1** précédent : Étienne qui souhaite mesurer le champ de pesanteur g avec un pendule simple.

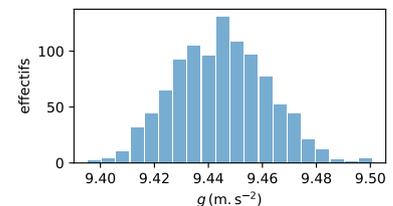
On peut tirer aléatoirement 1000 valeurs de ℓ entre $\ell_{min} = 509,0$ mm et $\ell_{max} = 511,0$ mm en suivant une loi uniforme (méthode de type B employée lors de la mesure). On obtiendrait l'histogramme des 1000 valeurs de ℓ ainsi obtenues ci-contre.



On ferait de même avec la période T du pendule mais en suivant une loi normale (méthode de type A employée lors de la mesure). On obtiendrait l'histogramme des 1000 valeurs de T ainsi obtenues ci-contre.



Pour chacun des 1000 couples de valeurs de ℓ et T , on calcule la valeur de g correspondante en utilisant l'expression littérale déjà établie $g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2}$. On obtiendrait l'histogramme des 1000 valeurs de g ainsi obtenues ci-contre.



(R) Le tracé des histogrammes n'est pas véritablement nécessaire. Ils ont une surtout une portée didactique afin de faciliter les explications : ils illustrent bien le caractère aléatoire des simulations et le type de loi probabiliste choisie pour ℓ et T ...

L'incertitude-type $u(g)$ recherchée peut alors être naturellement choisie comme l'écart-type s_x des 1000 valeurs de g obtenues.

Dans l'exemple illustrés par les histogrammes ci-dessus, on obtient $u(g) = 0,017$ m.s⁻², ce qui bien est la même valeur que celle obtenue par le calcul à la main en propageant les incertitudes (voir exemple 4 du paragraphe **C.1** précédent.)

b Implémentation sous Python

<p>Importer les bibliothèques utiles</p>	<pre># Pour effectuer des opérations sur des tableaux de valeurs : import numpy as np # Pour effectuer des tirages aléatoires : import numpy.random as rd # Pour tracer des graphiques et histogrammes éventuels : import matplotlib.pyplot as plt</pre>
<p>Préciser des informations de nature expérimentales concernant les grandeurs mesurées directement x, y, \dots</p>	<pre># ===== MESURES DE x, y , ... ===== # SI x suit une loi UNIFORME : xmin = ... xmax = ... x = (xmin + xmax) / 2 # valeur centrale # SI y suit une loi NORMALE : y = ... # valeur moyenne u_y = ... # incertitude-type # etc (continuer ainsi autant de fois qu'il y a d'autres grandeurs physiques qui ont été mesurées de manière directe)</pre>
<p>Effectuer les tirages aléatoires. Voir la partie 3 du cours Outils numériques.</p>	<pre># ===== TIRAGES ALEATOIRES ===== # Nombre de tirages : N = 100000 # par exemple ... # N valeurs de x générées dans le tableau Numpy ci-dessous en suivant une loi uniforme : x_MC = rd.uniform(xmin , xmax , N) # N valeurs de x générées dans le tableau Numpy ci-dessous en suivant une loi normale : y_MC = rd.normal(y , u_y , N) # -- CALCUL des N VALEURS DE z # On génère un tableau NumPy contenant les N valeurs de z. On utilise l'expression littérale de z en fonction de x, y, etc , mais on tapera x_MC au lieu de x, y_MC au lieu de y, etc : z_MC = ...</pre>
<p>Estimer z et $u(z)$ et afficher les valeurs</p>	<pre># ===== ESTIMATION DE z ET u(z) ===== # calcul de z en utilisant l'expression littérale de z en fonction de x,y,... z = ... # écart-type expérimental u_z = np.std(z_MC, ddof=1) # Affichage du résultat : print('z =', z) print('u(z) =', u_z)</pre>
<p>Tracé facultatif de l'histogramme des valeurs de z tirées au sort</p>	<pre># ===== Histogramme ===== plt.hist(z_MC, bins='rice') plt.xlabel('z (unité?)') # ! plt.ylabel('effectifs') plt.show()</pre>

Exemple

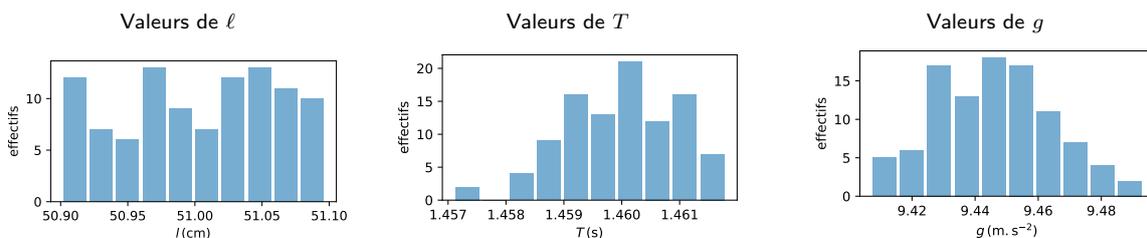
Reprenons à nouveau l'exemple 4 du paragraphe C.1. Compléter le code ci-dessous permettant notamment d'estimer l'incertitude-type $u(g)$:

```

1 # ===== IMPORTATION DES BIBLIOTHEQUES =====
2 import numpy as np
3 import numpy.random as rd
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 # ===== MESURES DE l et T =====
7 # -- Longueur l évaluée par la méthode de type B
8
9 .....
10 .....
11 .....
12 .....
13 # -- Période T évaluée par la méthode de type A
14
15 .....
16 .....
17 .....
18
19 # ===== TIRAGES ALEATOIRES =====
20 # Nombre de tirages :
21 N = 100000
22 # -- TIRAGES des N VALEURS DE l et T
23
24 .....
25 .....
26 .....
27 .....
28 # -- CALCUL des N VALEURS DE g
29
30 .....
31 .....
32 # ===== ESTIMATION DE g ET u(g) =====
33 # estimation de g :
34
35 .....
36 .....
37 # écart-type expérimental :
38
39 .....
40 .....
41 # Affichage du résultat :
42
43 .....
44 .....
45 .....
46
47 # ===== HISTOGRAMME =====
48 plt.hist(g_MC, bins='rice')
49 plt.xlabel(r'$g$, (\rm m.s^{-2})$')
50 plt.ylabel('effectifs')
51 plt.show()

```

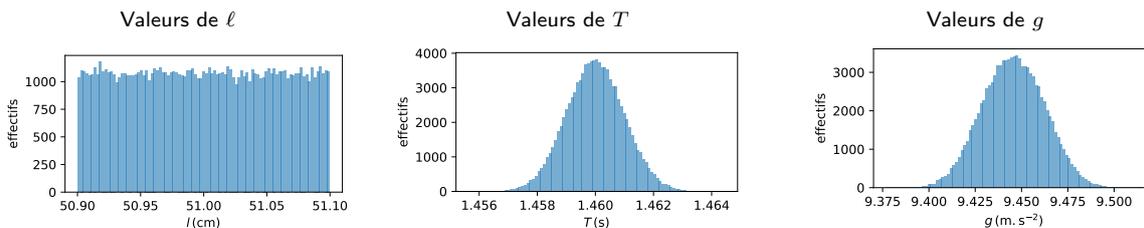
Quel nombre N de tirages au sort faut-il effectuer ?

Résultats pour $N = 100$ 

$$\Rightarrow g = 9.445483664018715 \quad u(g) = 0.018311686826331792$$

En réexécutant le code, la valeur de $u(g)$ fluctue entre 0,015 et 0,019 m.s^{-2} environ. De plus, l'allure des histogrammes varie également. Par ailleurs, on ne retrouve pas une allure clairement rectangulaire et gaussienne respectivement pour les valeurs de l et T tirées au sort.

Résultats pour $N = 100\,000$



$\Rightarrow g = 9.445483664018715 \quad u(g) = 0.016852541090663593$

En réexécutant, la valeur de $u(g)$ arrondie à 2 chiffres significatifs ne varie plus et se stabilise à $0,017 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Et les histogrammes présentent désormais une allure lissée, inspirant davantage confiance ... Par ailleurs, il était certainement préférable de prendre une grande valeur de N afin de voir apparaître le caractère rectangulaire de la loi uniforme et le caractère gaussien de la loi normale et donc que la variabilité du processus de mesure soit la mieux simulée possible. D'où un résultat plus fiable et plus stable pour la valeur de $u(g)$.

Résultat de la mesure :

On retrouve bien le même résultat que celui déjà trouvé en effectuant la propagation des incertitudes à la main.

Le temps de calcul étant très court, ne pas hésiter à **prendre un grand nombre de tirages aléatoires** (au moins 10 000) afin que la valeur de l'incertitude-type paraissent «stable» après réexécution du même algorithme Monte-Carlo plusieurs fois d'affilée.

D Comparaison de deux mesures



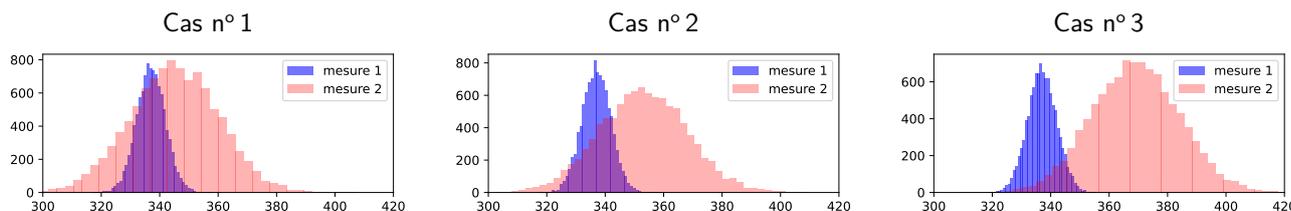
CAPACITÉS EXIGIBLES

- ✦ Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé
- ✦ Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation

D.1 Usage de l'écart normalisé

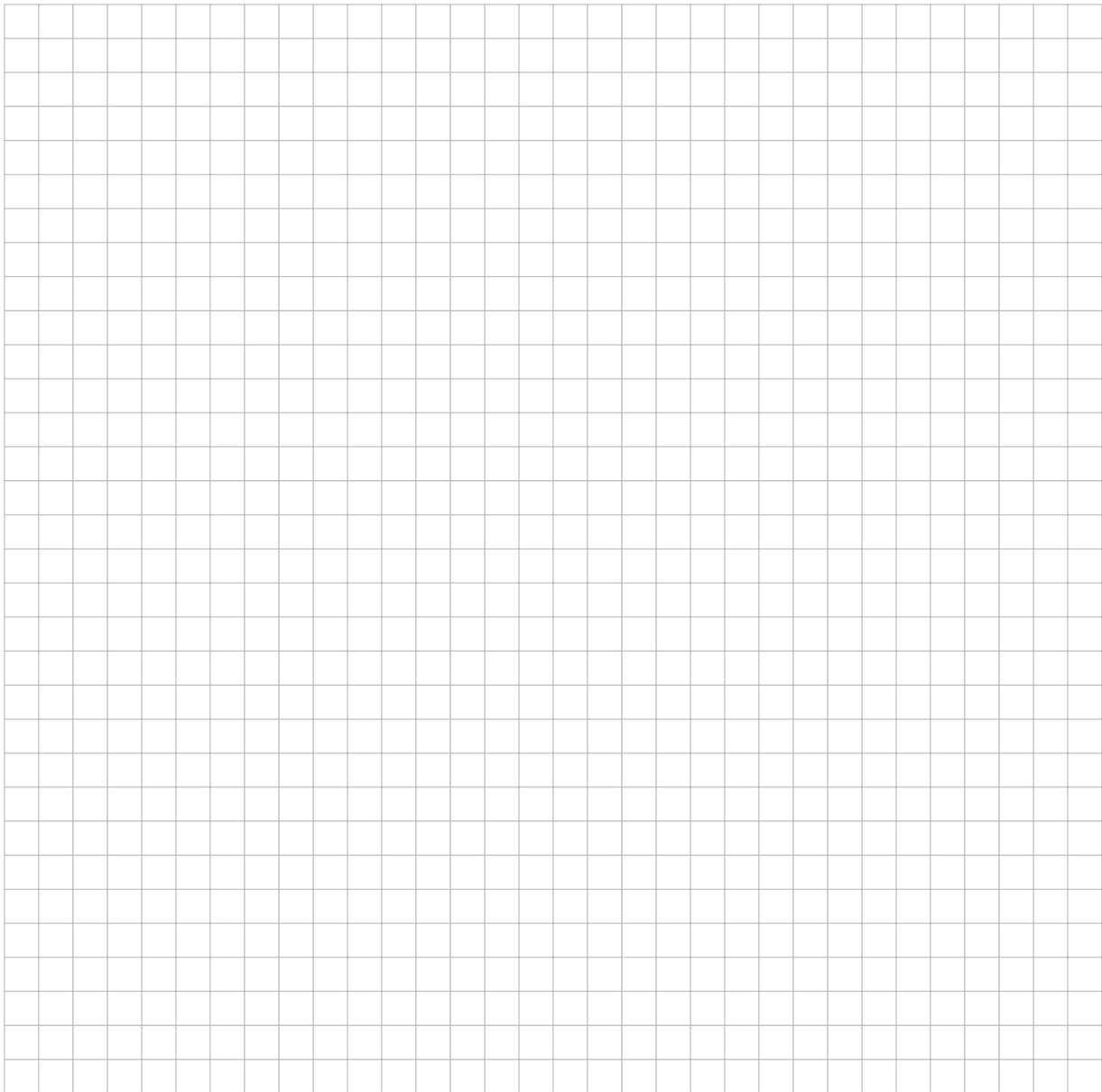
Une même grandeur x a pu être mesurée par deux méthodes différentes. La première - respectivement deuxième - méthode donne une estimation x_1 et une incertitude $u(x_1)$ - resp. x_2 et $u(x_2)$.

Imaginons les dispersions de mesures suivantes :

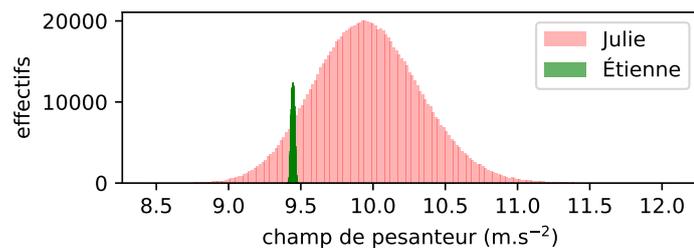


La **compatibilité** entre les deux mesures paraît naturellement plus facile à affirmer dans le cas n° 1 que dans le cas n° 3.

Cela nous invite à **chercher un critère quantitatif permettant d'affirmer ou infirmer la compatibilité entre deux mesures d'une même grandeur** : plus l'écart $\epsilon = x_1 - x_2$ entre les deux estimations de x est suffisamment proche de 0, plus la compatibilité est assurée.



À titre de curiosité et afin de mieux se représenter visuellement la compatibilité entre les deux méthodes, voici des histogrammes obtenues à l'aide de simulations Monte-Carlo (avec 10^6 tirages aléatoires) :



Que dire en cas d'incompatibilité ?

L'incompatibilité peut avoir différentes raisons :

- Expérience mal réalisée ?
- Incertitude(s) sous-estimée(s) ? ou source d'incertitude oubliée ?

(R) En effet, comme les incertitudes apparaissent au dénominateur dans l'expression de E_N cela ferait augmenter la valeur de E_N jusqu'à potentiellement dépasser le seuil de 2

ATTENTION : à l'inverse, si on a surestimé l'incertitude-type, cela diminue l'écart normalisé et on risque de conclure à une compatibilité par erreur ...

- Modélisation du ou des phénomènes physiques impliqués erronée ou incomplète ? Dans ce cas, il convient de préciser quel(s) aspect(s) du modèle pourrai(en)t être remis en cause et pourquoi.

D.2 Cas d'une comparaison à une valeur de référence

Définition

À notre niveau, la notion de «**valeur de référence**» signifie implicitement une valeur qui fait autorité et dont l'incertitude est suffisamment faible devant celle de la mesure à laquelle on la compare.

Exemple

La valeur de référence du son dans l'air ambiant à 20°C est 343,4 m.s⁻¹.

Ainsi, pour une mesure x_{mes} que l'on souhaite comparer à une valeur de référence x_{ref} dont on néglige l'incertitude-type devant celle de x_{mes} , l'écart normalisé s'écrit alors :

$$E_N = \frac{|x_{mes} - x_{ref}|}{u(x_{mes})}$$

► Que faire/que dire en cas d'incompatibilité avec la valeur de référence ? !

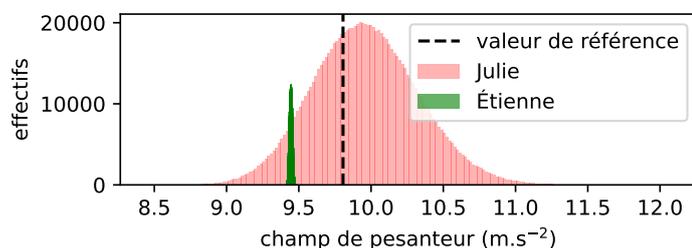
À partir du moment où le travail expérimental effectué est honnête, correctement et clairement expliqué, etc, l'éventuelle incompatibilité avec une valeur de référence ($E_N > 2$) n'est pas synonyme d'échec ! Il convient par contre d'arriver à porter un regard critique sur l'origine de cette incompatibilité (voir paragraphe **D.1** précédent).

Exemple

La valeur de référence retenue pour le champ de pesanteur à hauteur de Paris est 9,806 m.s⁻².
Que dire des mesures obtenues par Julie et Étienne ?



Reprenons les histogrammes déjà obtenus précédemment à l'aide de simulations Monte-Carlo et rajoutons la valeur de référence pour illustrer graphiquement les conclusions auxquelles nous aboutissons :



E Régressions linéaires



CAPACITÉS EXIGIBLES

- ✦ Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle
- ✦ Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés
- ✦ Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle

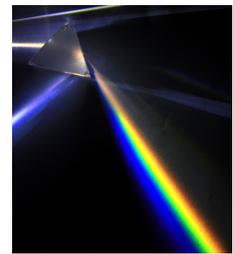
Afin de mieux appréhender les notions à venir, il vaut mieux les illustrer à l'aide d'un exemple.

Exemple de la loi de Cauchy

Comme tous milieux dispersifs en optique (milieux dont l'indice optique dépend de la longueur d'onde), le verre flint SF10 peut disperser les couleurs par réfraction (à l'aide d'un prisme taillé dans ce verre par exemple).

On souhaite vérifier la loi empirique de Cauchy exprimant l'indice optique n en fonction de la longueur d'onde λ ainsi :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$



Les valeurs expérimentales de l'indice n présentées ci-après ont été obtenues par spectroscopie, avec un prisme en flint SF10 et une lampe spectrale n'émettant que certaines longueurs d'onde :

λ (nm)	404,7	435,8	480,0	546,1	578,1	615
n	1,7812	1,7631	1,7524	1,7381	1,7288	1,7241
$u(n)$	0,0022	0,0018	0,0020	0,0026	0,0019	0,0024

L'incertitude sur la longueur d'onde est négligeable.

- À l'aide d'une approche graphique, on cherche à montrer que la loi de Cauchy est bien adéquate avec ces mesures.
- Et si tel est le cas, on souhaitera estimer les valeurs de A et B , ainsi que leurs incertitudes-type respectives.

E.1 Réaliser et analyser une modélisation affine

Pour réaliser une modélisation affine, il faut parvenir à se ramener à une loi de la forme :

$$Y = aX + b$$

où a représente le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

Dans le cas de la loi de Cauchy, l'identification s'effectue assez simplement :

$$Y = n \quad , \quad X = \frac{1}{\lambda^2} \quad , \quad a = B \quad , \quad b = A$$

- Nous devons tracer n en fonction de $\frac{1}{\lambda^2}$, puis effectuer la régression linéaire.

En TP, nous emploierons parfois le logiciel Regressi.

Ici, nous présentons l'implémentation sous Python. Revoir si besoin **4** du cours *Outils numériques*.

```

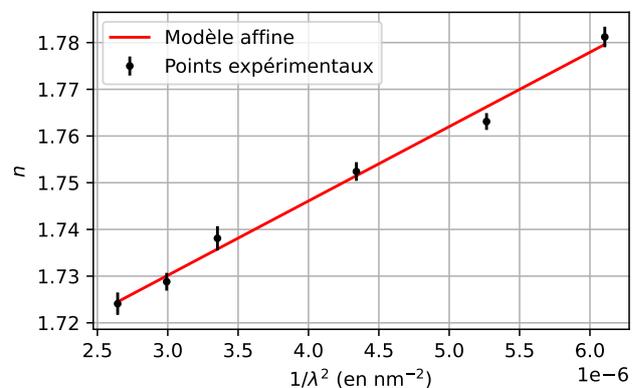
1 # ===== Saisie des valeurs expérimentales =====
2
3 # longueurs d'onde (en nm)
4 lambda = np.array([404.7, 435.8, 480.0, 546.1, 578.1, 615])
5
6 # indices optiques
7 n = np.array([1.7812, 1.7631, 1.7524, 1.7381, 1.7288, 1.7241])
8
9 # incertitudes-type sur les indices
10 u_n = np.array([0.0022, 0.0018, 0.0020, 0.0026, 0.0019, 0.0024])
11
12
13
14 # ===== Modélisation affine =====
15
16 # Valeurs à mettre en abscisse
17 X = 1 / lambda**2
18
19 # Ajustement affine
20 p = np.polyfit(X, n, 1)
21
22 # pente B
23 B = p[0]
24
25 # ordonnée à l'origine A
26 A = p[1]
27
28 # tracé :
29 # - nuage des points expérimentaux avec barres d'incertitudes
30 plt.errorbar(X, n, yerr = u_n, ls='', marker='.', label = "Points expérimentaux")
31 # - droite de modélisation
32 plt.plot(X, A + B*X, label = "Modèle affine")
33
34 plt.xlabel(r"$1/\lambda^2$ (en nm$^{-2}$)")
35 plt.ylabel(r"$n$")
36 plt.grid()
37 plt.legend()
38 plt.show()

```

Ci-contre le tracé obtenu.

Au premier coup d'œil, on constate plutôt un bon accord. Mais les 3ème et 5ème points de mesure semblent s'écarter un peu trop de la droite de modélisation : est-ce suffisant pour invalider la loi de Cauchy ?

Non, dans la mesure où les 4 autres points de mesures semblent être cohérents avec le modèle affine.



Par ailleurs, nous n'avons fixé les barres d'incertitudes qu'à $\pm u(n)$. Afin d'avoir une meilleure confiance en ces points de mesures, nous pourrions les fixer à $\pm 2u(n)$.

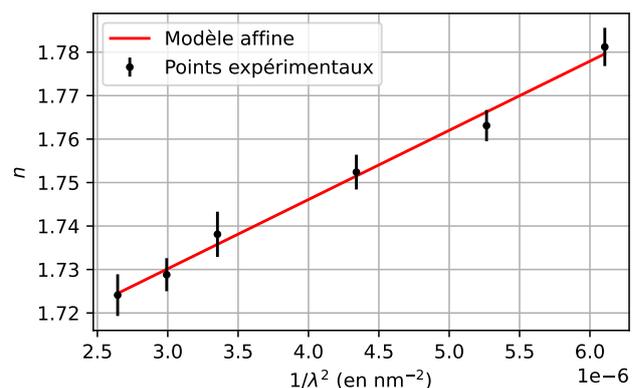
Dans ce cas, il faut modifier la ligne n° 30 ainsi :

$$yerr = 2 * u_n$$

Nous obtiendrions alors le tracé ci-contre.

On dit que l'on a élargi les incertitudes. On choisit d'ailleurs assez couramment ce facteur 2 d'élargissement (correspondant à une confiance de 95% si la dispersion des mesures suit une loi normale, voir **B.1**).

Désormais, l'accord avec le modèle affine semble bon pour tous les points de mesures.



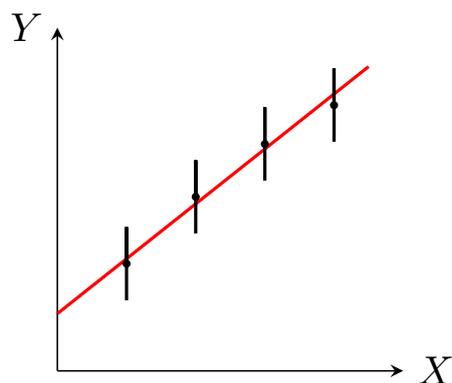
(R) L'élargissement des incertitudes n'affecte pas les paramètres graphiques du modèle affine.

(R) Le 5ème point de mesure semble tout de même beaucoup s'éloigner du modèle affine. Il n'est pas interdit, si on a le temps, de ré-effectuer la mesure de n pour la longueur d'onde correspondante.



ATTENTION : la procédure de validation d'un modèle graphique affine nécessitera toujours un peu de discernement. Valideriez-vous le modèle affine dans chacun des cas ci-dessous ?

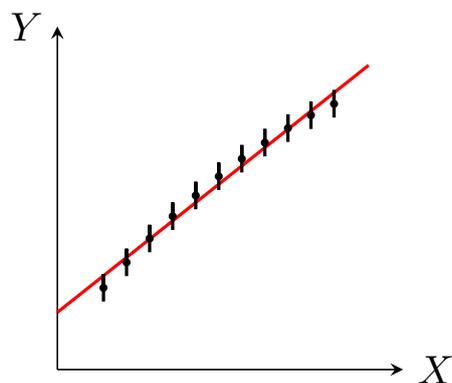
cas (a)



Intervalle de confiance à 68%



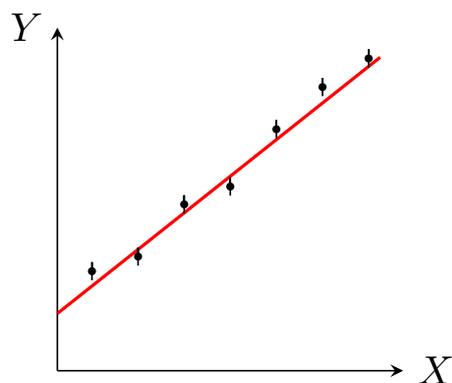
cas (b)



Intervalle de confiance à 95% et coefficient de corrélation de 0,998



cas (c)



Intervalle de confiance à 68%



E.2 Visualisation et analyse des résidus

À l'issue d'une modélisation affine, on appelle **résidus** les écarts observés en ordonnée entre les points expérimentaux et la droite de modélisation obtenue par ajustement graphique.

Illustrons tout de suite avec l'exemple de la loi de Cauchy pour que cela soit plus clair. Pour visualiser l'écart entre les points expérimentaux et le modèle graphique, il suffit de retrancher les valeurs en ordonnée fournies par l'ajustement affine aux valeurs d'indice obtenues expérimentalement. C'est ce qui est fait à la ligne n° 42 ci-dessous :

```

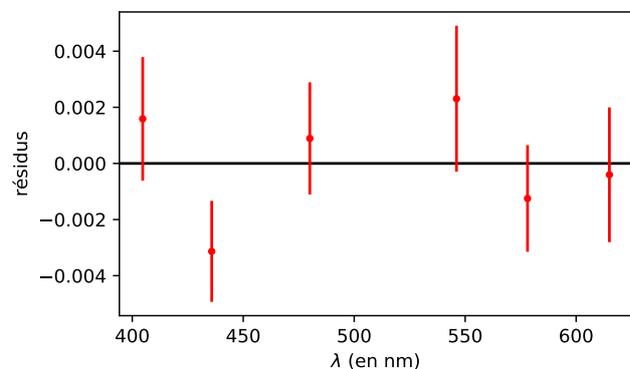
39 # ===== Etude des résidus =====
40
41 # calcul des résidus
42 residus = n - (A + B*X)
43
44 # tracé avec barres d'incertitudes
45 plt.errorbar(lambd, residus, yerr = u_n, color='red',ls='',marker='.')
46 plt.axhline(0,color='black') # tracé d'une ligne horizontale à 0
47 plt.xlabel(r"$\lambda$ (en nm)")
48 plt.ylabel("résidus")
49 plt.show()

```

On obtient le tracé ci-contre.

Si le modèle s'ajustait parfaitement aux points expérimentaux, on devrait trouver des résidus nuls, aux incertitudes près.

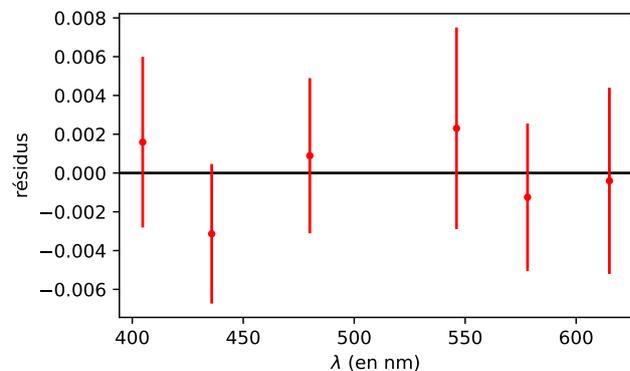
Dans l'exemple choisi, on retrouve donc les mêmes interrogations sur les 2 points de mesure à 435,8 nm et 546,1 nm, **mais de manière bien plus perceptible** qu'en **A**.



Le tracé des résidus permet donc d'analyser plus finement l'adéquation entre le modèle affine et l'expérience.

On pourrait, comme précédemment, choisir des barres d'incertitudes à $\pm 2u(n)$ plutôt, ce qui confortera davantage la confiance dans nos points de mesure et permettra de valider sans trop de difficulté le modèle affine. En choisissant donc à nouveau **yerr=2*u_n** (à la ligne n° 45), et on obtient le tracé ci-contre.

Ainsi, **la loi de Cauchy semble bien vérifiée, les résidus valant 0 aux incertitudes de mesure près.**

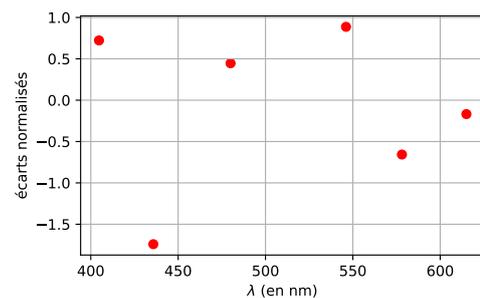


R On trace aussi parfois les écarts normalisés entre les points expérimentaux et le modèle, en considérant que les ordonnées du modèle affine servent de référence. Ainsi, les écarts normalisés se calculent de cette manière (ligne n° 54) :

```

51 # ===== Etude des écarts normalisés =====
52
53 # calcul des écarts normalisés
54 EN = residus/u_n
55
56 # tracé en fonction de la longueur d'onde
57 plt.scatter(lambd, EN )
58 plt.xlabel(r"$\lambda$ (en nm)")
59 plt.ylabel("écarts normalisés")
60 plt.grid()
61 plt.show()

```



Notons qu'ici les écarts normalisés sont algébrisés : ils possèdent un signe, pour savoir si l'écart avec l'expérience est par défaut ou par excès.

La validation du modèle s'effectue ici en constatant que quelque soit la longueur d'onde, E_N est inférieur à 2.

E.3 Incertitudes sur les paramètres d'ajustement affine

Comment estimer l'incertitude-type sur la pente B et sur l'ordonnée à l'origine A ?

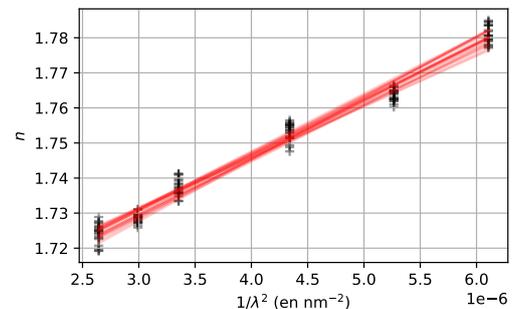
Pour cela, on peut effectuer des **simulations Monte-Carlo** :

1. tenant compte des données sur les incertitudes de l'indice n , on effectue N tirages aléatoires de séries de valeurs de n
2. pour chacune des N séries de valeurs de n obtenues, on effectue la modélisation graphique, on obtient donc N valeurs aléatoires de A et B
3. pour obtenir $u(A)$ et $u(B)$, il n'y a plus qu'à calculer les écarts-types s_x correspondants.

Pour $N = 10$ tirages, la superposition des N séries de mesures et des N modélisations graphiques pourrait fournir le tracé ci-contre.

On observe naturellement les points de mesures tirés au sort s'aligner suivant les barres d'incertitudes déjà tracées auparavant.

NB : ce type tracé n'est pas à effectuer mais aide à la compréhension de la méthode Monte-Carlo.



Voici comment implémenter cela avec Python :

```

1 # ===== Incertitudes des paramètres de la modélisation =====
2
3 # Simulation Monte-Carlo
4
5 # nombre d'expériences simulées
6 N = 100000
7
8 # initialisation des listes dans lesquelles les valeurs de A et B seront stockées
9 AMC, BMC = [], []
10
11
12 for i in range(N):      # pour chaque expérience
13     # on simule la mesure des indices n pour les 6 longueurs d'onde
14     nMC = n + rd.normal(0, u_n, len(n))
15     # on effectue l'ajustement affine avec cette série de valeurs de n
16     p = np.polyfit(X, nMC, 1)
17     # on stocke les valeurs des paramètres d'ajustement dans les listes AMC et BMC
18     AMC.append(p[1])
19     BMC.append(p[0])
20     # et on réitère au rang i suivant
21
22 # on calcule les écarts-types
23 u_A = np.std(AMC, ddof = 1)
24 u_B = np.std(BMC, ddof = 1)
25
26
27 # et enfin on affiche les résultats
28 print("A = ", A)
29 print("u(A) = ", u_A)
30 print("ur(A) = ", u_A/A*100, '%')
31
32 print("B = ", B, "nm2")
33 print("u(B) = ", u_B, "nm2")
34 print("ur(B) = ", u_B/B*100, '%')

```

⇒ A = 1.6824162872243453 u(A) = 0.0031670085765382896 ur(A) = 0.188241673632584 %
 B = 15918.731189853095 nm2 u(B) = 717.2251107651464 nm2 ur(B) = 4.505541944337369 %

R Si on souhaite tracer les histogrammes, on obtiendrait ceci :

