



raisonnablement affirmée. Conventionnellement, on choisit 2 incertitudes-type $u(\epsilon)$. Autrement dit, pour qu'il y ait compatibilité entre les deux mesures, on considère qu'il faut :

$$|\epsilon - 0| \leq 2u(\epsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\epsilon|}{u(\epsilon)} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}} \leq 2$$

Compatibilité entre deux mesures

On définit l'**écart normalisé** (ou le «z-score») entre deux mesures x_1 et x_2 d'une même grandeur x par :

$$E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}}$$

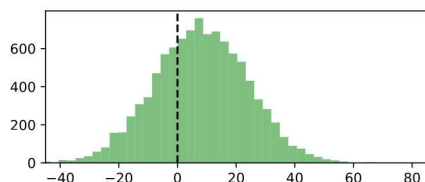
Les deux mesures x_1 et x_2 d'une même grandeur x sont **compatibles** si l'**écart normalisé** vérifie :

$$E_N \leq 2$$

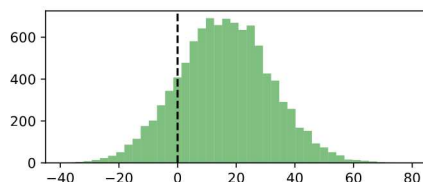
R Ce seuil à 2 est un choix arbitraire. L'origine de ce seuil est historique, ayant été et continuant d'être très fréquemment employé en économie, médecine, psychologie ...

Voici les valeurs de E_N dans chacun des trois cas précédents, ainsi que les histogrammes pour $\epsilon = x_1 - x_2$:

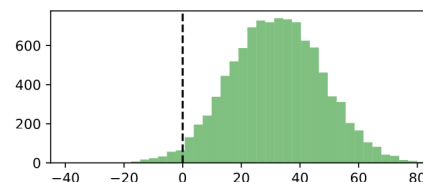
Cas n° 1 : $E_N = 0,5$



Cas n° 2 : $E_N = 1,0$



Cas n° 3 : $E_N = 2,0$



On constate objectivement qu'à partir de $E_N = 2$ il devient difficile d'affirmer que ϵ est proche de 0!

Exemple

Julie met en place une autre méthode que celle d'Étienne pour mesurer le champ de pesanteur terrestre g . Elle fait chuter un objet d'une hauteur $H = 1,50$ m avec une demi-étendue de $1,0$ cm. Au chronomètre, elle répète la mesure du temps de chute τ (en seconde) :

0,48 0,57 0,56 0,53 0,55 0,60 0,51 0,57 0,54 0,49 0,52 0,57 0,56 0,63 0,52 0,59

En négligeant les frottements de l'air, on peut montrer à l'aide de la 2ème loi de Newton que : $\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}}$.

- À quelle mesure de g peut-elle aboutir ?
- Comparer les deux méthodes de mesures.

□ Mesure de H
(type B)

$$H = 1,50 \text{ m}$$

$$u(H) = \frac{1,0 \text{ cm}}{\sqrt{3}}$$

$$u(H) = 0,577 \text{ cm}$$

$$\text{D'où } u_r(H) \approx 0,4\%$$

□ Mesure de τ
(type A)

$$\tau = \bar{\tau} = 0,5493 \text{ s}$$

$$s_x = 0,0402 \text{ s}$$

$$u(\tau) = \frac{0,0402}{\sqrt{16}} = 0,0101 \text{ s}$$

$$\text{D'où } u_r(\tau) \approx 2\%$$

□ Mesure de g On a : $T^2 = \frac{2H}{g} \Leftrightarrow g = \frac{2H}{T^2}$

Application numérique : $g = 9,34265 \text{ m.s}^{-2}$

De plus :

$$u_r(g) = u_r\left(\frac{2H}{T^2}\right)$$

$$= u_r\left(\frac{H}{T^2}\right) = u_r(H \cdot T^{-2})$$

$$= \sqrt{u_r^2(H) + [-2 \cdot u_r(T)]^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{u(H)}{H}\right)^2 + 4 \left(\frac{u(T)}{T}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0,577 \cdot 10^{-2}}{1,50}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{0,0101}{0,5493}\right)^2}$$

$u_r(g) = 0,0369$ soit $3,69\%$

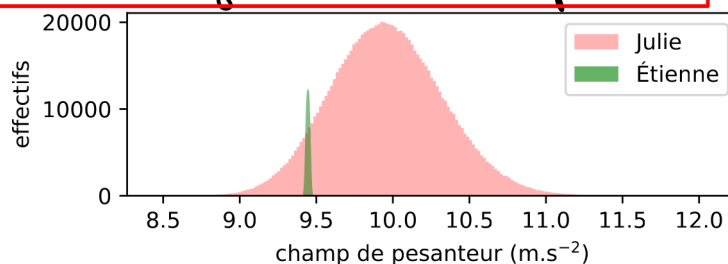
Ainsi : $u(g) = u_r(g) \cdot g$ d'où $u(g) = 0,37 \text{ m.s}^{-2}$

Finalement : $g = 9,34 \text{ m.s}^{-2}$ $u(g) = 0,37 \text{ m.s}^{-2}$

Comparaison avec Étienne : $E_N = \frac{|g_E - g_J|}{\sqrt{u^2(g_E) + u^2(g_J)}} = \frac{|9,445 - 9,94|}{\sqrt{0,07^2 + 0,37^2}} = 1,3$

$E_N < 2$, les deux mesures de g sont donc compatibles.

À titre de curiosité et afin de mieux se représenter visuellement la compatibilité entre les deux méthodes, voici des histogrammes obtenues à l'aide de simulations Monte-Carlo (avec 10^6 tirages aléatoires) :



Que dire en cas d'incompatibilité ?

L'incompatibilité peut avoir différentes raisons :

□ Expérience mal réalisée ?

□ Incertitude(s) sous-estimée(s) ?

(R) En effet, comme les incertitudes apparaissent au dénominateur dans l'expression de E_N , une incertitude sous-estimée ferait augmenter la valeur de E_N jusqu'à potentiellement dépasser le seuil de 2.

ATTENTION : à l'inverse, si on a surestimé l'incertitude-type, cela diminue l'écart normalisé et on risque de conclure à une compatibilité par erreur ...

□ Source(s) d'incertitude(s) oubliée(s) ?

(R) Auquel cas, le dénominateur de E_N est également sous-estimé et donc E_N est surestimé pouvant donc dépasser 2.

□ Modélisation du ou des phénomènes physiques impliqués erronée ou incomplète ? Dans ce cas, il convient de préciser quel(s) aspect(s) du modèle pourrai(en)t être remis en cause et pourquoi.

D.2 Cas d'une comparaison à une valeur de référence

Définition

À notre niveau, la notion de «**valeur de référence**» signifie implicitement une valeur qui fait autorité et dont l'incertitude est suffisamment faible devant celle de la mesure à laquelle on la compare.

Exemple

La valeur de référence du son dans l'air ambiant à 20°C est 343,4 m.s⁻¹.

Ainsi, pour une mesure x_{mes} que l'on souhaite comparer à une valeur de référence x_{ref} dont on néglige l'incertitude-type devant celle de x_{mes} , l'écart normalisé s'écrit alors :

$$E_N = \frac{|x_{mes} - x_{ref}|}{u(x_{mes})}$$

► Que faire/que dire en cas d'incompatibilité avec la valeur de référence ? !

À partir du moment où le travail expérimental effectué est honnête, correctement et clairement expliqué, etc, l'éventuelle incompatibilité avec une valeur de référence ($E_N > 2$) n'est pas synonyme d'échec ! Il convient par contre d'arriver à porter un regard critique sur l'origine de cette incompatibilité (voir paragraphe **D.1** précédent).

Exemple

La valeur de référence retenue pour le champ de pesanteur à hauteur de Paris est 9,806 m.s⁻².
Que dire des mesures obtenues par Julie et Étienne ?

Ecart entre g_E et g_{ref} :

$$E_N = \frac{|9,445 - 9,806|}{0,017} = 21 \geq 2$$

La mesure d'Étienne est donc incompatible avec la valeur de référence.

Ecart entre g_J et g_{ref} :

$$E_N = \frac{|9,94 - 9,806|}{0,37} = 0,4 < 2$$

La mesure de Julie est donc compatible avec la valeur de référence.

Reprenons les histogrammes déjà obtenus précédemment à l'aide de simulations Monte-Carlo et rajoutons la valeur de référence pour illustrer graphiquement les conclusions auxquelles nous aboutissons :

