

1] Montrer que $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$

2] Montrer que $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$

1] On sait que :
$$\begin{cases} \gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} \\ \gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} \end{cases}$$

D'où $-\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}}$

Ainsi : $\boxed{\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2} \quad (*)$

2] On peut écrire
$$\begin{cases} \overline{FA} = \overline{FO} + \overline{OA} & (A, F \text{ et } O \text{ alignés}) \\ \overline{F'A'} = \overline{F'O} + \overline{OA'} & (A', F' \text{ et } O \text{ alignés}) \end{cases}$$

D'où en remplaçant dans $(*)$:

$$\underbrace{(\overline{F'O} + \overline{OA'})}_{-f'} \cdot \underbrace{(\overline{FO} + \overline{OA})}_{f'} = -f'^2$$

$$\Leftrightarrow -f'^2 - f' \cdot \overline{OA} + \overline{OA'} \cdot f' + \overline{OA'} \cdot \overline{OA} = -f'^2$$

$$\Leftrightarrow -f' \cdot \overline{OA} + \overline{OA'} \cdot f' + \overline{OA'} \cdot \overline{OA} = 0$$

$\frac{-1}{f' \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OA'}} \times$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{f'} = 0$$

$\swarrow \times \frac{-1}{f' \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OA'}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}}$$

Rappel

- $\overline{OF'} = f'$
- $\overline{FO} = -\overline{OF'} = -f'$
- $\overline{OF} = -\overline{OF'} = -f'$
- $\Rightarrow \overline{FO} = f'$