Cours

6 Calcul numérique d'une dérivée

Capacités exigibles

- Utiliser un schéma numérique pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point

A Principe du calcul numérique d'une dérivée

Soient une fonction f dérivable et h un pas de calcul. Pour calculer numériquement $f'(x)$ en une valeur de x donnée, on peut utiliser différentes méthodes :

Différence finie en avant	Différence finie en arrière	Différence finie centrée
$f'(x) \simeq \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$f'(x) \simeq \dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}$	$f'(x) \simeq \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$
`def deriv_avant(f,x,h):` `    return (f(x+h)-f(x))/h`	`def deriv_arriere(f,x,h):` `    return (f(x)-f(x-h))/h`	`def deriv_centree(f,x,h):` `    return (f(x+h)-f(x-h))/2h`

Il faut choisir une valeur de h suffisamment petite afin de pouvoir retranscrire fidèlement les variations locales de la fonction f.

Toutefois, h devra bien entendu rester supérieur au plus petit écart possible entre deux nombre flottants différents, càd $h > 2.10^{-16}$ en 64 bits.

B Dérivée d'un tableau de valeurs

Soient un tableau de valeurs du temps t et un tableau de valeurs d'une grandeur $x(t)$.

La dérivée de $x(t)$ peut être calculée sous forme d'un tableau de la manière suivante (en suivant la méthode des différences finies en avant) :

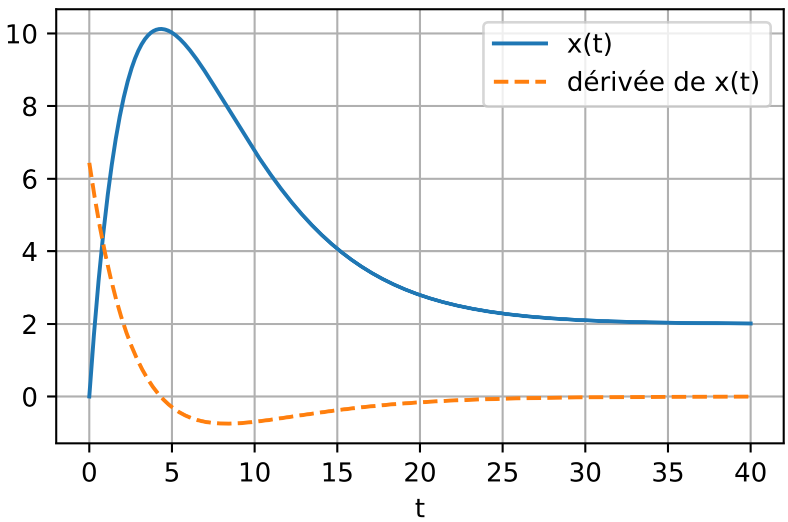
```python
import numpy as np

t = ...     # tableau des valeurs des instants
x = ...     # tableau des valeurs de x(t)

# initialisation du tableau des valeurs des dérivées :
v = np.zeros(len(x)-1)

""" le tableau v contiendra nécessairement un élément de moins que x
à cause de la méthode de dérivée numérique employée """


# Calcul des dérivées :

for i in range(0,len(v)):
    v[i] = ( x[i+1] - x[i] ) / ( t[i+1] - t[i] )

""" v[i] représente ainsi la dérivée de x(t) à l'instant t[i] """
```

Exemple

On souhaite tracer la fonction $x(t) = (6t-2)e^{-t/4}+2$, ainsi que sa dérivée.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

t = np.linspace(0,40.,1000) # tableau des valeurs des instants
x = (6*t-2)*np.exp(-t/4) + 2    # tableau des valeurs de x(t)


# initialisation du tableau des valeurs des dérivées :
v = np.zeros(len(x)-1)

# Calcul des dérivées :
for i in range(0,len(v)):
    v[i] = ( x[i+1] - x[i] )/(t[i+1]-t[i])


# tracés

plt.plot(t,x,label="x(t)")

# avec np.delete(t,-1), on supprime le dernier instant pour le tracé de v(t)
plt.plot(np.delete(t,-1),v,'--',label="dérivée de x(t)")

plt.legend()
plt.xlabel("t")
plt.grid()
plt.show()
```

On obtient le tracé ci-dessous :



R *Le tracé est cohérent : au début, la fonction $x(t)$ est croissante puis devient décroissante, ainsi la dérivée est initialement positive puis s'annule et devient négative. À la fin du tracé, la fonction $x(t)$ devient constante, donc la dérivée s'annule.*