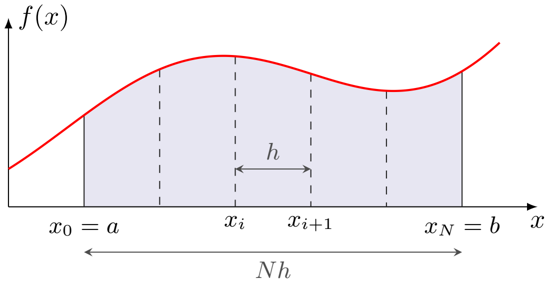
7 Calcul numérique d'une intégrale

Capacités exigibles

- Mettre en œuvre la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment

A Méthode des rectangles

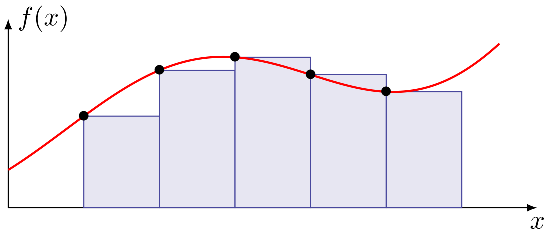


On souhaite calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Pour cela, on «découpe» tout d'abord l'intervalle $[a, b]$ en N segments de longueur $\boldsymbol{h = \dfrac{b-a}{N}}$ comme dans l'exemple ci-contre.

Dans la suite, notons $x_i = a + ih$.

A.1 Méthode des rectangles à gauche



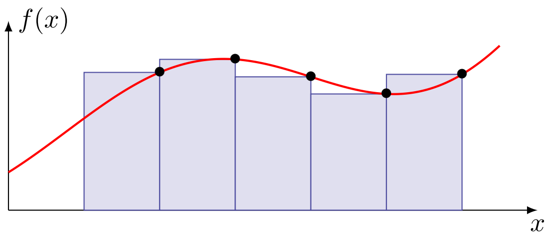
Pour chaque valeur de $i \in [\![0, N-1]\!]$, on calcule l'aire d'un rectangle compris entre les abscisses x_i et x_{i+1} de hauteur $f(x_i)$ *(valeur de f à gauche à l'extrémité gauche de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$)*.

L'aire du rectangle compris entre x_i et x_{i+1} est alors égale à $hf(x_i) = hf(a + ih)$.

Puis, en sommant toutes ces aires, on obtient une valeur approchée de l'aire sous la courbe, et donc une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$:

$$\text{Méthode des rectangles à gauche :} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;\simeq\; h\sum_{i=0}^{N-1} f(a+ih)$$

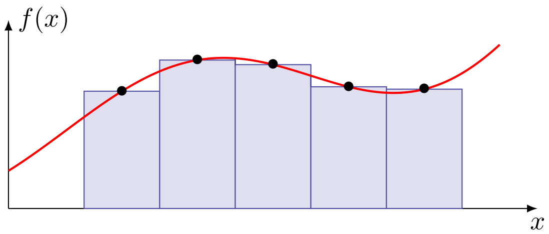
A.2 Méthode des rectangles à droite



La méthode est la même que précédemment mais désormais la hauteur est choisie à $f(x_{i+1})$ *(valeur de f à gauche à l'extrémité droite de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$)*. L'aire du rectangle compris entre x_i et x_{i+1} est alors égale à $hf(x_{i+1}) = hf(a + ih + h)$.

$$\text{Méthode des rectangles à droite :} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;\simeq\; h\sum_{i=0}^{N-1} f(a+ih+h)$$

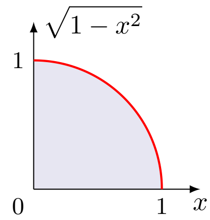
A.3 Méthode des rectangles au milieu



La méthode reste encore la même que précédemment mais désormais la hauteur est choisie à $f\left(x_i + \dfrac{h}{2}\right)$ *(valeur de f au milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$)*. L'aire du rectangle compris entre x_i et x_{i+1} est alors égale à $hf(x_{i+1}) = hf(a + ih + h)$.

$$\text{Méthode des rectangles au milieu :} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;\simeq\; h\sum_{i=0}^{N-1} f\left(a+ih+\frac{h}{2}\right)$$

B Implémentation sous Python et exemple



On souhaite calculer la valeur de π. Pour cela, on peut calculer quatre fois l'aire d'un quart de cercle de rayon 1, décrit par la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

R *En effet, c'est l'expression obtenue lorsqu'on isole l'ordonnée y dans l'équation cartésienne de ce cercle : $x^2 + y^2 = 1$, d'aire totale π ...*

Il suffit donc d'intégrer $f(x)$ sur $[0, 1]$ et de multiplier par 4.

Voici une manière d'implémenter les méthodes vues précédemment sous Python :

```python
import numpy as np

#-------------------------------
# Méthode des rectangles à gauche
def int_rect_gauche(f,a,b,N):
    h = (b-a)/N
    S = 0
    for i in range(N):
        S = S + f(a+i*h)
    return S*h

# Méthode des rectangles à droite
def int_rect_droite(f,a,b,N):
    h = (b-a)/N
    S = 0
    for i in range(N):
        S = S + f(a+i*h+h)
    return S*h

# Méthode des rectangles au milieu
def int_rect_milieu(f,a,b,N):
    h = (b-a)/N
    S = 0
    for i in range(N):
        S = S + f(a+i*h+h/2)
    return S*h

#-------------------------------
# Fonction décrivant le quart de cercle
def f_quart_cercle(x):
    return np.sqrt(1-x**2)

#-------------------------------
# Nombre de rectangles
N = 1000

#-------------------------------
# Evaluation de pi
eval_pi =  4*int_rect_gauche(f_quart_cercle,0,1,N)
print("Méthode des rectangles à gauche :",eval_pi, "écart : ", eval_pi-np.pi)

eval_pi =  4*int_rect_droite(f_quart_cercle,0,1,N)
print("Méthode des rectangles à droite :",eval_pi, "écart : ", eval_pi-np.pi)

eval_pi =  4*int_rect_milieu(f_quart_cercle,0,1,N)
print("Méthode des rectangles au milieu :",eval_pi, "écart : ", eval_pi-np.pi)
```

$\Rrightarrow$

```
Méthode des rectangles à gauche : 3.143555466911023   écart : 0.0019628133212229717
Méthode des rectangles à droite : 3.139555466911023   écart : -0.0020371866787702864
Méthode des rectangles au milieu : 3.1416035449129063   écart : 1.0891323113160212e-05
```

On constate que **la méthode des rectangles au milieu converge plus rapidement** !

Et bien entendu, **la précision du résultat sera d'autant meilleure que le nombre N de rectangles est grand** *(subdivisions plus «fines» de l'intervalle $[a, b]$ et donc approximation de la fonction f par une fonction en escalier d'autant meilleure)*. Voici le résultat pour $N = 100\,000$ dans l'exemple précédent :

$\Rrightarrow$

```
Méthode des rectangles à gauche : 3.1416126164020075 écart : 1.9962812214391334e-05
Méthode des rectangles à droite : 3.1415726164020077 écart : -2.0037187785426624e-05
Méthode des rectangles au milieu : 3.1415926644818297 écart : 1.0892036605980593e-08
```