

Chapitre 5 : Introduction à la physique quantique

LE COURS

A Dualité onde-particule

A.1	Lumière : onde ou particule?	2
A.2	Matière : particule ou onde?	6

B Notion de fonction d'onde

B.1	Fonction d'onde et densité de probabilité de présence	8
B.2	Interprétation probabiliste de l'expérience des fentes d'Young	11

C Principe d'indétermination d'Heisenberg

C.1	Notion d'indétermination quantique	12
C.2	Inégalité d'Heisenberg	12

D Quantification de l'énergie

D.1	Atome d'hydrogène et modèle planétaire de Bohr	14
D.2	Puits unidimensionnel infini	17

A Dualité onde-particule

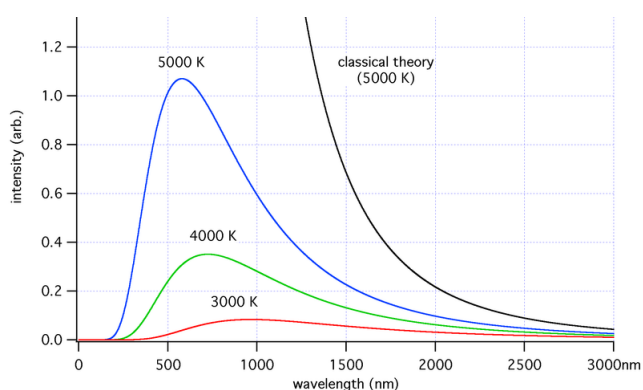
A.1 Lumière : onde ou particule ?

a. Les impasses de la physique classique à la fin du XIX^{ème} siècle

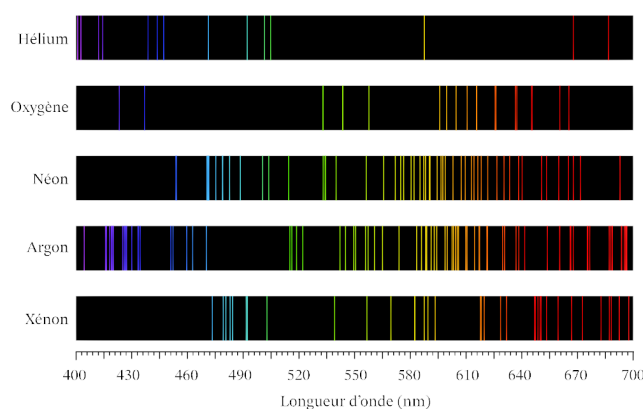
Jusqu'à la fin du XIX^{ème} siècle, la physique semblait avoir atteint son apogée : toutes les lois fondamentales semblaient bien connues. Les lois de la mécanique de Newton étaient parfaitement maîtrisées et permettaient d'interpréter le mouvement des astres, la chute des corps, ... La théorie classique de l'électromagnétisme de J.C. Maxwell, un des grands triomphes de la science, effectuait une synthèse parfaite entre l'électricité, le magnétisme et la lumière. Ainsi, grâce à Maxwell, la **nature ondulatoire de la lumière** était clairement établie et permettait d'interpréter aussi bien les expériences de diffraction que les expériences d'interférences telles que les fentes d'Young.

Cependant, **des zones d'ombres subsistaient**. À commencer par la compréhension du **spectre de rayonnement thermique** que la théorie de Maxwell ne pouvait expliquer (**Figure 1a**).

Figure 1



(a) Spectre de rayonnement du corps noir : les spectres expérimentaux ne coïncident pas avec le modèle théorique classique (courbe "classical theory")



(b) Spectres d'émission de raies : pourquoi la matière n'émet-elle que certaines longueurs d'ondes ?

Par ailleurs, la **spectroscopie atomique** était également reconnue comme un des grands problèmes de l'époque : pourquoi les atomes présentent-ils un spectre **discret** d'absorption et d'émission ? (**Figure 1b**) Cela restait grandement mystérieux car la physique classique échouait à l'expliquer ...

Ainsi, la physique classique butait sur quelque chose, et ne pouvait avancer sans la percée de grands physiciens, tels que Max Planck (**Figure 2**) ou Albert Einstein (**Figure 4**), et qui révolutionnèrent la physique.

b. Un tournant majeur : la découverte du photon

► Max Planck et le rayonnement thermique

En 1900, afin d'interpréter le spectre du rayonnement thermique, Max Planck émit l'hypothèse que les échanges énergétiques entre le rayonnement et la matière qui produit ce rayonnement étaient quantifiés : la lumière de fréquence ν ne pouvait échanger de l'énergie avec la matière que par quantités *discrètes*, multiples entiers d'un **quantum d'énergie** élémentaire. Afin d'être en accord avec les courbes expérimentales obtenues, il établit qu'un quantum d'énergie devait correspondre à $h\nu$ où ν est la fréquence du rayonnement et h est la **constante de Planck**, devenue une constante fondamentale de la physique : $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34}$ J.s dont la valeur est désormais fixée par convention depuis le 20 mai 2019 (permettant ainsi de donner une définition du kilogramme...).

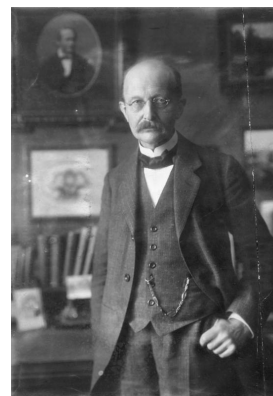


Figure 2 – Max Planck (1858-1947)

Cette interprétation lui permit de donner une formule de la densité spectrale de l'intensité du rayonnement du corps noir :

$$\frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

qui était en parfait accord avec ce qui était observé et permettait enfin d'avoir une expression analytique correcte de cette densité spectrale ! Planck obtint le prix Nobel de physique en 1918 pour cette avancée majeure.

Ainsi, cette fonction s'ajustait bien sur les courbes mais, pour autant, personne ne savait pourquoi ! Il restait donc à savoir ce **que représentait physiquement ce quantum d'énergie** ? La réponse fut apportée par Einstein et son interprétation de l'effet photoélectrique.

▶ Albert Einstein et l'effet photoélectrique

Lorsqu'un métal est éclairé par un rayonnement du visible ou dans l'ultraviolet, celui-ci émet des électrons. Cet effet est connu depuis la moitié du XIX^{ème} siècle. On comprenait aisément qu'en apportant un travail W suffisant à un électron (par exemple sous forme d'énergie lumineuse ici), on puisse lui permettre de franchir une barrière d'énergie potentielle et ainsi s'échapper du métal. Mais le fait qu'un électron ne puisse pas être arraché si la fréquence ν de la lumière ne dépasse pas une fréquence seuil ν_s , même si le faisceau est d'intensité lumineuse très forte, était complètement incompréhensible.

Cet effet de seuil paraissait très étrange pour les physiciens du XIX^{ème} siècle car, a priori, « *l'énergie n'a pas de couleur !* » et donc, a priori, peu importe pour les électrons qu'elle soit rouge, verte ou bleue ! Du moment, qu'on leur apporte une quantité d'énergie suffisante pour leur extraction. Et pourtant, cela a bien une importance cruciale dans cette expérience. De plus, si $\nu > \nu_s$, l'électron peut être arraché mais son énergie cinétique est indépendante de l'intensité lumineuse ! Une interprétation physique satisfaisante de ces observations n'arrivera qu'en 1905 et révolutionnera la physique.



Figure 4 – Albert Einstein (1879-1955). Photographie prise en 1905, une année marquant le grand tournant de la physique.

En 1905, Einstein s'inspira de Planck : le rayonnement de fréquence ν est constitué de « quanta de lumière », transportant chacun une énergie $h\nu$ et un électron du métal ne peut absorber qu'un seul quantum de lumière d'énergie $h\nu$. L'effet de **fréquence seuil** ν_s se comprend alors aisément. Il faut un travail W_{min} minimal pour extraire un électron (correspondant à la hauteur de la barrière d'énergie potentielle que doit franchir l'électron). L'énergie d'un quantum permettant l'extraction d'un électron est donc tel que :

$$h\nu \geq W_{min} \quad \Leftrightarrow \quad \nu \geq \nu_s \quad \text{où } \nu_s \text{ est tel que } W_{min} = h\nu_s$$

De plus, si E_c représente l'énergie cinétique acquise par l'électron après l'extraction (pas d'énergie cinétique avant), alors l'énergie $h\nu$ apportée par le quantum permet de fournir le travail d'extraction W_{min} et l'énergie cinétique finale E_c : $h\nu = W_{min} + E_c$.

Et donc : $E_c = h(\nu - \nu_s)$.

Ce résultat est tout à fait conforme avec l'expérience : l'énergie cinétique des électrons émis dépend linéairement de la fréquence de la lumière incidente et ne dépend pas de l'intensité lumineuse.

Il ne fallait qu'un pas pour avancer l'idée que le rayonnement est un paquet de « **particules de lumière** » (les quanta de lumière, et non pas les quantums...) qui peuvent être absorbés et émis par la matière. On appellera ces particules, les **photons** transportant chacun une énergie $h\nu$.

À l'aide de cette interprétation et des mesures expérimentales, on put retrouver la valeur de h déjà proposée par Planck cinq ans auparavant ! Einstein reçut le prix Nobel en 1921 pour son travail sur l'effet photoélectrique.

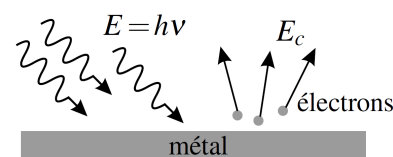


Figure 3 – Effet photoélectrique

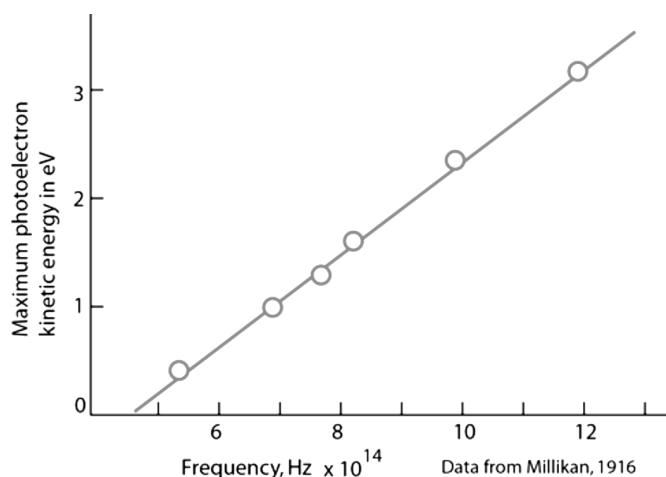


Figure 5 – Résultats expérimentaux obtenus par Millikan en 1916

► L'effet Compton

L'existence des photons fut à nouveau confirmée par l'effet Compton découvert en 1922 : Compton s'est intéressé à la diffusion de rayons X sur une cible de carbone.

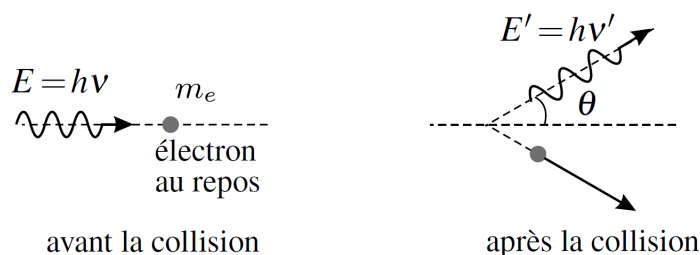


Figure 6 – Effet Compton : «collision» entre un photon et un électron. Le calcul relativiste donne $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$.

D'après les théories classiques de la fin du XIX^{ème} siècle, lorsqu'une onde électromagnétique de fréquence ν se dirige vers de la matière, on explique la diffusion des ondes par la matière par le fait que les électrons se mettent en oscillation à la même fréquence que l'onde incidente et émettent ainsi à leur tour une onde diffusée **à la même fréquence** (un résultat classique de l'étude des régimes sinusoïdaux forcés).

Pourtant, en envoyant des rayons X de longueur d'onde $\lambda = 0,071$ nm sur une cible de carbone, Arthur Compton observa un rayonnement diffusé de fréquence ν' différente de la fréquence incidente !

Il put interpréter cette variation de fréquence (et donc de longueur d'onde) grâce à l'idée des photons d'Einstein, en considérant que le rayonnement incident est constitué de particules d'énergie $h\nu$: après la collision, le photon a cédé un peu de son énergie à l'électron, son énergie finale $h\nu'$ est donc plus faible qu'avant la collision. Ainsi, la fréquence a nécessairement diminué.

En utilisant le principe de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans le cadre des théories relativistes d'Einstein, il en déduisit que la quantité de mouvement d'un photon incident devait nécessairement être

$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ afin que les résultats expérimentaux puissent être correctement interprétés. Il obtint le prix Nobel de physique en 1927.

c. Utilisation de source de photons uniques

On sait aujourd'hui produire des sources de photons uniques qui permettent de réaliser des expériences illustrant remarquablement le double aspect, ondulatoire et corpusculaire, de la lumière.

► Expérience avec une lame semi-réfléchissante

Nous allons par exemple utiliser une telle source conjointement avec une lame-semi réfléchissante.

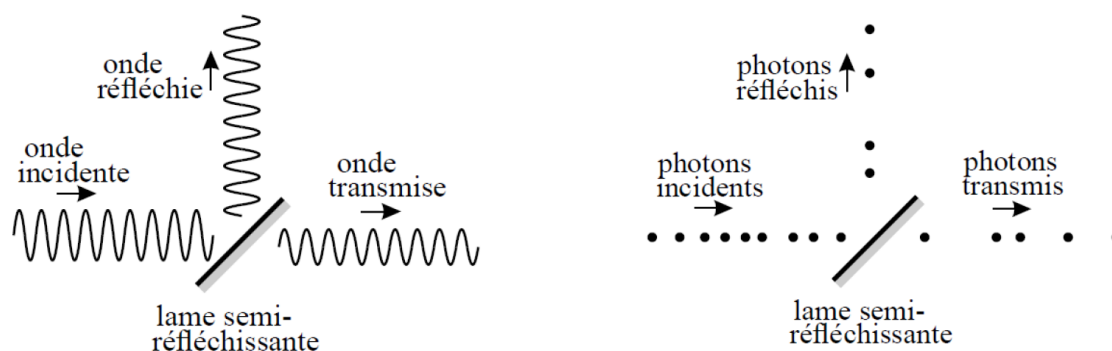


Figure 8 – Lame semi-réfléchissante d'un point de vue ondulatoire (à droite) et d'un point de vue corpusculaire

D'un point de vue ondulatoire, la moitié de l'énergie lumineuse est redirigé d'un côté ou de l'autre de la lame. L'amplitude est donc simplement divisée de moitié. Rien de révolutionnaire ici.

Mais, d'un point de vue corpusculaire, si le photon existe véritablement, alors un photon incident part soit d'un côté de la lame, soit de l'autre de manière aléatoire et équiprobable. Pour vérifier cela, on réalise alors l'expérience décrite dans la Figure 9.

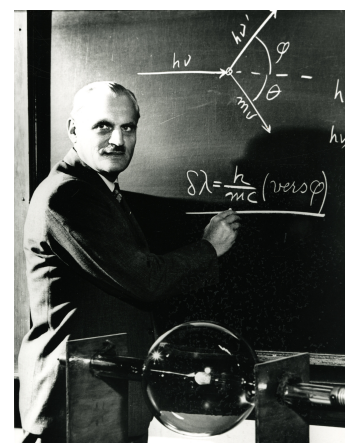


Figure 7 – Arthur H. Compton (1882-1962)

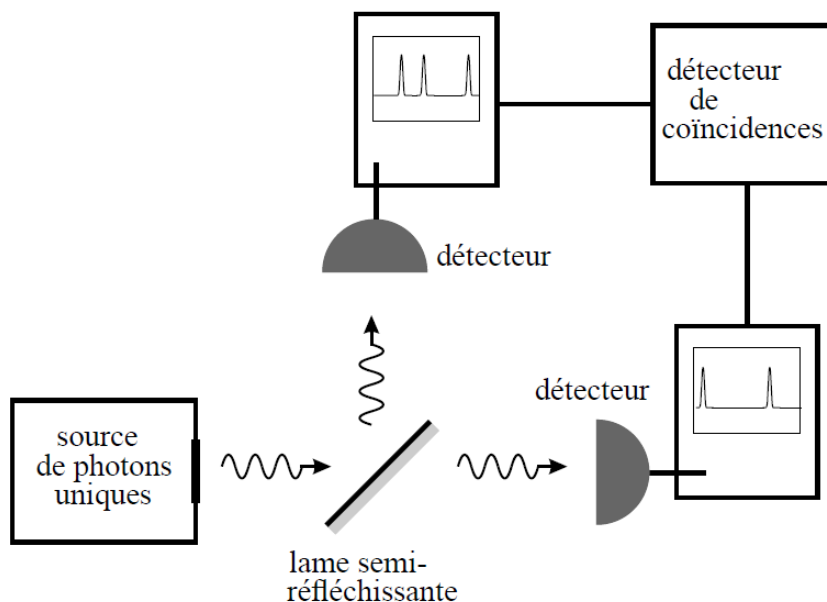


Figure 9 – Expérience démontrant le caractère corpusculaire de la lumière

Au niveau d'un des détecteurs, un pic observé témoignerait de l'impact d'un photon sur le détecteur dans l'approche corpusculaire.

Dans l'approche ondulatoire, il s'agirait simplement d'un pic correspondant à une impulsion (une "bouffée" d'onde) très courte. À ce stade, la nécessité du photon pour décrire la lumière n'est donc pas établie.

Alors, **pourquoi cette expérience démontre-t-elle que le photon existe ?** Tout simplement parce qu'**aucune coïncidence n'est détectée entre les deux détecteurs** : on n'observe jamais deux pics simultanément sur chaque détecteur, alors qu'une approche purement ondulatoire ne l'interdirait pas (*la moitié de l'énergie d'une impulsion aurait pu se scinder en deux au niveau de la lame semi-réfléchissante*). Ainsi, l'approche ondulatoire est effectivement insuffisante pour décrire la lumière (*mais nécessaire pour décrire l'expérience des fentes d'Young par exemple*) et l'interprétation corpusculaire de cette expérience est la suivante : un photon ne pouvant se scinder en deux «frappe» forcément un seul des deux détecteur.

► Interférences photon par photon

Réalisons l'expérience des fentes d'Young bien connue depuis le XIX^{ème} siècle mais réalisée avec une source de photons uniques.

Au fur et à mesure que les photons sont émis, les impacts sont visualisés au niveau du capteur CCD jouant le rôle d'écran permettant de visualiser les interférences.

Les impacts semblent être aléatoires au début puis, au bout d'un nombre suffisant de photons émis, on retrouve la figure d'interférences obtenue par une source lumineuse classique de même fréquence optique.

La probabilité qu'un photon arrive au niveau d'une frange brillante est donc plus importante que dans le cas d'une frange sombre.

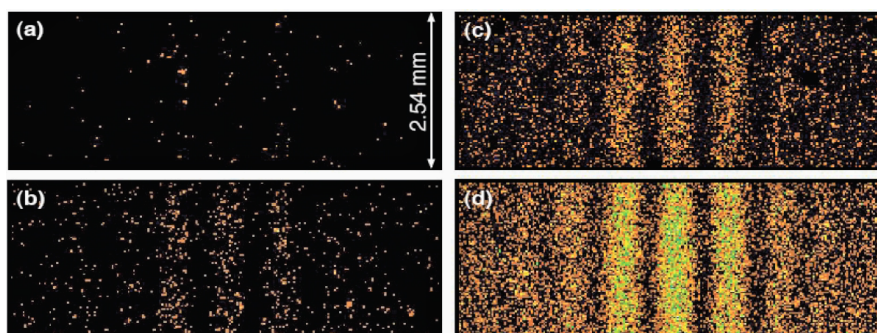


Figure 10 – Expérience des fentes d'Young avec une source de photons uniques (accumulation successive de 10, 100, 500 et 2000 clichés, chaque cliché correspondant à 10 nouveaux photons en moyenne)

Ainsi, sur une durée courte d'observation, on ne perçoit que l'aspect corpusculaire. Mais sur une durée plus longue, l'aspect ondulatoire finit par se manifester.

d. Les caractéristiques du photon

Dualité onde-particule : la lumière peut présenter un comportement ondulatoire ou corpusculaire .

La particule associée à la lumière est appelée **photon**. Ses caractéristiques sont les suivantes :

❑ Le photon a une masse nulle.

❑ Il se déplace à la vitesse de la lumière dans le vide c quelque soit le milieu de propagation.

(R) *Par contre, les processus non-instantanés d'absorption et de réémission de photons par le milieu de propagation rendent la propagation de l'onde lumineuse plus moins lente, d'où des indices optiques différents suivant les milieux ...*

❑ **Relations de Planck-Einstein** :

Un photon associé à une onde de fréquence ν et de longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{\nu}$ possède l'énergie $E = h\nu$ où

$h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s est la **constante de Planck** .

La **quantité de mouvement** (ou l'**impulsion**) correspondante est de norme $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{E}{c}$.

Si la lumière se propage suivant un vecteur unitaire \vec{u} , alors $\vec{p} = p\vec{u}$.

Application n°1

Un laser hélium-néon émet un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 633$ nm et de puissance moyenne $\mathcal{P} = 2,0$ mW. Déterminer le nombre moyen de photons émis chaque seconde par le laser.

A.2 Matière : particule ou onde ?

a. L'onde de matière de Louis de Broglie

Le principe de la dualité onde-corpuscule de la lumière est tellement bien accepté que Louis de Broglie envisage pour la première fois en 1923 que les particules de matière, par définition de nature corpusculaire, pourraient aussi avoir un comportement ondulatoire. Il postula, pour toute particule, l'existence d'une *onde de matière* qui lui est associée.

Afin d'expliquer les spectres discrets des atomes, Il avait notamment en tête que les niveaux d'énergie discrets des atomes pouvaient provenir d'un phénomène d'ondes stationnaires. Il en vint à associer à une telle onde de matière la longueur

d'onde dite de de Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$ où $p = \|\vec{p}\|$ est la norme de la quantité de mouvement de la particule.

b. Illustrations expérimentales de la nature ondulatoire de la matière

► Diffraction d'électrons

La première confirmation expérimentale de l'hypothèse ondulatoire de la matière fut apportée en 1927 : les américains Davisson et Germer purent observer la **diffraction d'un faisceau d'électrons** par un cristal de nickel, prouvant ainsi l'aspect ondulatoire de la matière, tout du moins, des électrons.



Figure 11 – Louis de Broglie (1892-1987)

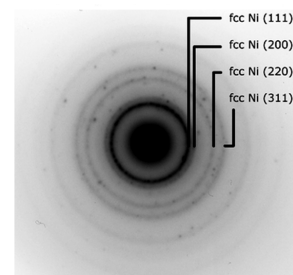
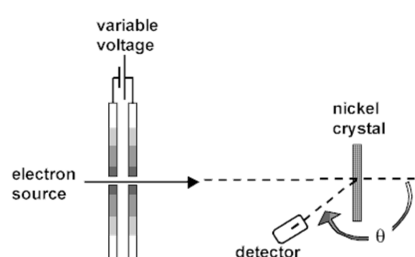
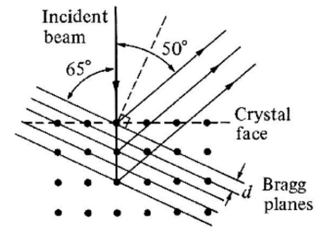


Figure 12 – Figure de diffraction d'un faisceau d'électrons obtenue par Davisson et Germer



(R) Un cristal se caractérise par un arrangement périodique d'atomes ou molécules dans l'espace agissant alors tel un réseau en optique. La diffraction par des cristaux avaient déjà été observées en 1912 avec des rayons X par Max von Laue, ce qui avait permis de mesurer la longueur d'onde des rayons X.



► Interférences d'électrons, d'atomes et de molécules

En 1994, des physiciens japonais de la Nippon Electronics (NEC) ont pu réaliser une expérience analogue aux fentes d'Young mais en utilisant des atomes froids (l'expérience avec des électrons étant plus difficile à réaliser) : des atomes de néon sont initialement piégés dans un système d'ondes stationnaires réalisés à l'aide de lasers et sont ensuite lâchés en chute libre au travers de deux fentes de $2 \mu\text{m}$ de large, distantes de $6 \mu\text{m}$. Sur le capteur, on visualise l'impact de chaque atome.

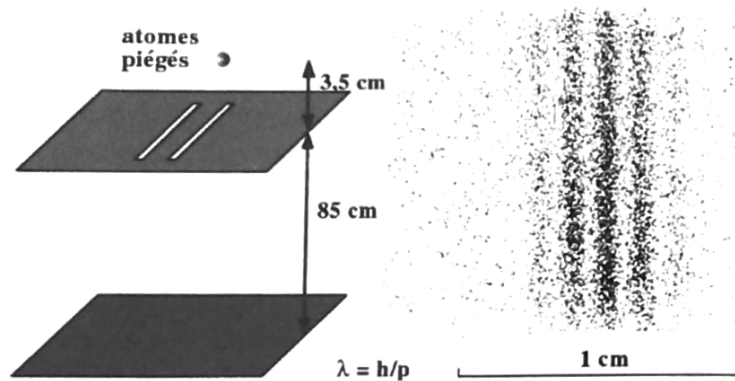


Figure 13 – Interférences d'atomes

L'estimation de l'interfrange en utilisant la longueur d'onde de de Broglie correspond à l'interfrange mesurée sur la figure observée.

D'autres expériences d'interférences ont pu être réalisées avec des neutrons, protons, électrons, atomes et même des molécules !

Dualité onde-corpuscule de la matière et de la lumière

La matière, comme la lumière, peut présenter un comportement corpusculaire et un comportement ondulatoire. Suivant l'expérience menée, on peut observer l'un ou l'autre aspect. C'est pourquoi on parle de **dualité onde-corpuscule**.

L'aspect ondulatoire d'une particule de matière de quantité de mouvement p peut être décrit à l'aide de la longueur d'onde de de Broglie (relation similaire à la 2ème relation de Planck-Einstein) :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

(relation similaire à la 2ème relation de Planck-Einstein)

Application n°2

Déterminer la longueur d'onde dans les cas ci-dessous :

1. un humain qui marche ;
2. une balle de tennis de 60 g et de vitesse 100 km/h ;
3. un électron de masse $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg et accéléré par une tension $U = 4,0$ kV .

B Notion de fonction d'onde

B.1 Fonction d'onde et densité de probabilité de présence

Revenons sur l'interprétation de l'expérience des fentes d'Young « particules par particules ».

Le caractère aléatoire de l'impact d'une particule incite à faire une approche probabiliste.

► Cas d'une fente unique

On pourrait donc commencer par étudier la probabilité qu'a une particule d'arriver en un point M du détecteur lorsqu'on est sûr qu'elle est passée par une des deux fentes F_1 ou F_2 .

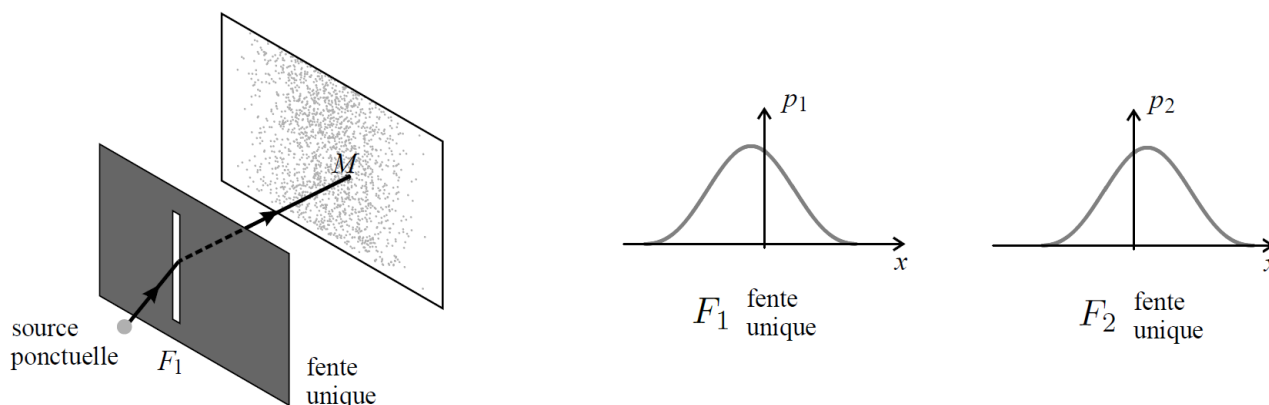


Figure 14 – Passage par une seule fente et distribution de probabilité

La fonction $p_1(x)$ est telle que la probabilité que la particule arrive entre x et $x + dx$ après être passé par la fente F_1 est donnée par $p_1(x)dx$. Et donc, la probabilité pour trouver la particule entre x_1 et x_2 est :

$$\int_{x_1}^{x_2} p_1(x)dx$$

De même pour la signification de $p_2(x)$.

Ainsi, lorsqu'une des deux fentes est obstruée et après un nombre suffisant d'impact, on observe une tache de diffraction sur le détecteur dont l'intensité se répartit le long de l'axe Ox suivant la loi de probabilité p_1 ou p_2 (Figure 14).

► Cas de deux fentes

Maintenant, que se passe-t-il si la particule a la possibilité de passer par les deux fentes ?

Dans une vision classique (Figure 15) où la matière se comporte comme une particule dont on connaît bien la trajectoire (si on connaît bien les conditions initiales), on s'attend naïvement à ce que la nouvelle distribution de probabilité $p(x)$ soient simplement la somme des deux contributions $p_1(x)$ et $p_2(x)$. En effet, les atomes passent un par un, les passages par l'une ou l'autre fente sont donc des phénomènes indépendants et les densités de probabilités devraient donc s'additionner :

$$p(x) \stackrel{??}{=} p_1(x) + p_2(x) ??$$

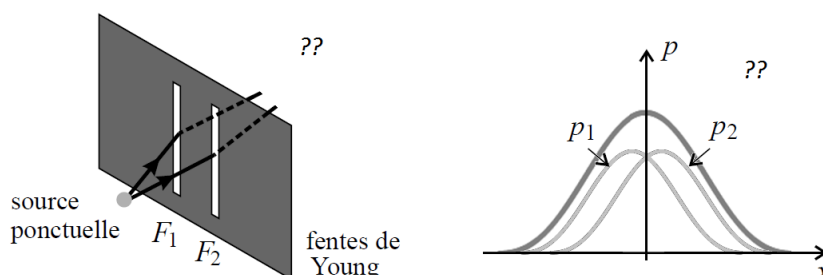


Figure 15 – Passage possible par deux fentes et prévision dans une approche classique

Mais il n'en est rien ! En effet, ce qui est observé en réalité (**Figure 16**), ce n'est pas une « tache de diffraction résultante » qui serait la superposition des deux obtenues dans le cas des fentes uniques. On en déduit donc que **les lois de probabilité ne s'additionnent pas** :

$$p(x) \neq p_1(x) + p_2(x) !!$$

Par contre, on observe une **figure d'interférence** comme déjà dit dans la **Séquence A** :

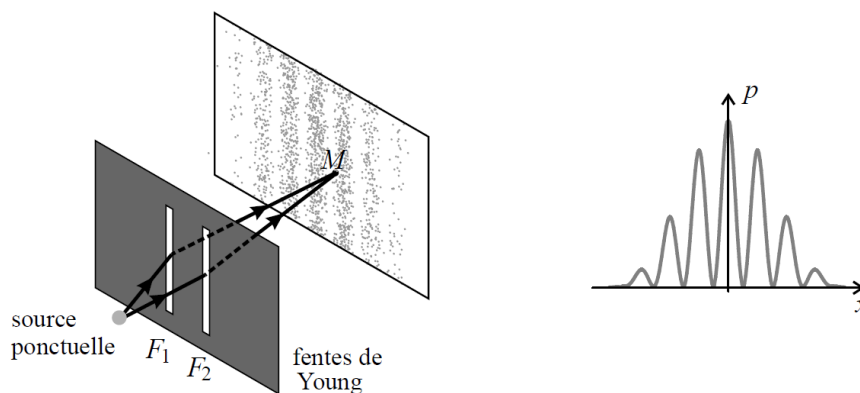


Figure 16 – Passage possible par l'une ou l'autre fente et distribution de probabilité

Ainsi, avec les deux fentes ouvertes, il apparaît des points de l'écran où la particule n'a aucune chance d'être présente (*interférences destructives*) alors qu'elle le pouvait lorsqu'une des deux fentes était fermées ! Étrange !!

► Influence de la mesure sur le système

D'où vient cette étrangeté ? Pourquoi l'interprétation classique « $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$ » est-elle fautive et ne parvient-elle pas à expliquer le phénomène d'interférence ?

Parce qu'elle suppose implicitement que l'on est capable de savoir par quelle fente est passée la particule sans que cela influe sur l'expérience.

Oui, on peut expérimentalement déterminer par quelle fente est passée chaque particule. Mais, le point crucial, c'est qu'en effectuant cette **mesure**, nous modifions fondamentalement l'expérience. En effet, l'état initial n'est plus : « *l'atome va passer soit par F_1 , soit par F_2* », mais plutôt : « *l'atome va passer par F_1 à coup sûr !* » ce qui est très différent, car on sait que cela va produire une densité de probabilité $p_1(x)$ qui n'a rien à voir avec la figure d'interférence !

(R) Pour s'en convaincre, soyons plus concret. Si on place par exemple un détecteur devant la fente 2 et si celui-ci ne détecte rien, c'est nécessairement que la particule est passée par la fente 1. Dans ce cas, on saura à coup sûr quelle aura été la fente de passage. Et, la fente 2 étant bloquée à cause de l'emploi du détecteur, on sait que l'on perdra la figure d'interférence (on retombe dans le cas d'une fente unique).

Ainsi, **si on sait** grâce à un dispositif de **mesure** que la particule est passée par la fente F_1 , alors automatiquement elle suivra la distribution $p_1(x)$ et non plus $p(x)$. Sinon, elle suivra la distribution $p_2(x)$. Et ainsi de suite, particule après particule. Finalement, on perdra donc l'effet d'interférence et on observera une loi de probabilité : $p'(x) = p_1(x) + p_2(x)$.

Par contre, si on arrête d'effectuer la mesure, alors on retrouve la figure d'interférence. **C'est donc le fait de ne pas savoir par quelle fente est passée la particule qui produit les interférences !**

Une mesure perturbe le système : c'est pourquoi l'expérience des fentes d'Young avec mesure et la même expérience sans mesure donnent des résultats très différents car ce n'est plus la même expérience !!

(R) Ces conclusions sont très étonnantes et déstabilisantes car dans la physique classique, connaissant parfaitement bien (aux incertitudes de mesures près) les conditions initiales, rien ne nous empêchait de déterminer précisément la trajectoire d'un objet sans qu'une mesure pendant l'évolution du système perturbe le comportement de celui-ci ...

► L'onde de matière de de Broglie est ... une onde de probabilité !

D'après l'expérience des fentes d'Young la **prévision d'un résultat de mesure ne peut être que de nature probabiliste !** Toutefois, le résultat répond à une loi de probabilité que la physique quantique permettra de déterminer grâce à la **fonction d'onde** qui représente une *onde de probabilité*.

Postulat de la fonction d'onde

La description complète de l'**état quantique** d'une particule dans l'espace à l'instant t s'effectue par une **fonction d'onde** notée $\psi(M, t)$, fonction continue en tout point M de l'espace et à tout instant t , et à valeur dans \mathbb{C} .

ψ , aussi appelée **amplitude de probabilité**, permet, entre autres, de déterminer la probabilité $\delta^3 P$ qu'a la particule de se trouver à l'instant t dans un volume infinitésimal $\delta^3 V$ centré autour de M :

$$\delta^3 P = |\psi(M, t)|^2 \delta^3 V$$

Ainsi, $p(M, t) = |\psi(M, t)|^2$ représente la fonction **densité de probabilité de présence**.

Comme la particule est certainement quelque part, en sommant continument les probabilités δP sur tout l'espace accessible, on trouve nécessairement 1 (càd 100%) :

$$\iiint_{\text{espace}} |\psi(M, t)|^2 \delta^3 V = 1$$

L'évolution spatio-temporelle de la fonction d'onde est régie par l'**équation de Schrödinger** (*vue et exploitée en 2ème année en filière PC et MP*). Il s'agit d'une équation **linéaire** : le **principe de superposition** s'applique donc aux fonctions d'onde.

Cas unidimensionnel

Dans le cas où on ne s'intéresse qu'à la coordonnée x , la probabilité qu'une particule décrite par une fonction d'onde ψ se trouve entre x et $x + dx$ à l'instant t est donc donnée par : $|\psi(x, t)|^2 dx$.

Ainsi, la probabilité que la particule soit située entre x_1 et x_2 est, par sommation : $\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x, t)|^2 dx$.

(R) *L'existence de la fonction d'onde est un postulat de la physique quantique. Cela ne se démontre donc pas. La légitimité de ce postulat réside dans le fait qu'il permet de donner une interprétation correcte de différentes expériences sur lesquelles butait la physique classique. Par ailleurs, le « triomphe » de la physique quantique se retrouve dans notre vie de tous les jours : ordinateurs, lecteur DVD, IRM, centrale nucléaire, guidage GPS grâce aux horloges atomiques, ... Il serait donc bien malvenu de remettre en cause ce postulat !*

► Traitement quantique nécessaire ?

La physique classique donne une description suffisamment précise des systèmes étudiés dans de nombreuses situations : il n'est pas utile de faire de la physique quantique pour étudier la chute d'une pomme par exemple.

Dans d'autres situations, la physique quantique est absolument nécessaire car la physique classique échoue à interpréter correctement les phénomènes observés.

Quel critère pourrait donc permettre de juger si une approche quantique est nécessaire dans telle ou telle situation ?

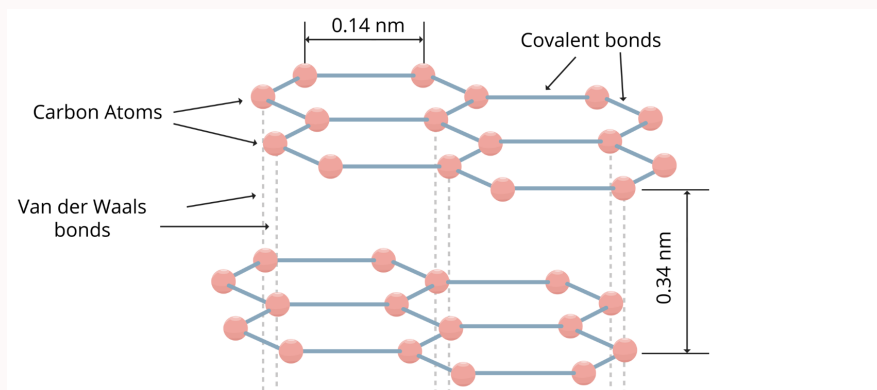
Ou, autrement dit, quand est-ce qu'une approche ondulatoire est nécessaire ?

Servons-nous d'une analogie avec l'optique géométrique : celle-ci ne tient pas compte de l'aspect ondulatoire de la lumière lorsque les phénomènes de diffraction peuvent être négligés. Cela n'est possible qu'à condition que les tailles caractéristiques L des ouvertures des instruments optiques soient très grandes devant les longueurs d'onde λ mises en jeu. À l'inverse, si l'ordre de grandeur de la longueur d'onde est proche voir plus grand que celui de la taille L , alors l'approche ondulatoire est nécessaire. Par analogie, nous formulerons donc notre critère sous la forme suivante :

Lorsque la longueur d'onde de de Broglie λ est au moins du même ordre de grandeur que la dimension caractéristique L du problème étudié, l'approche quantique est nécessaire.

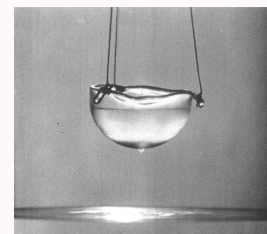
Application n°3

- Dans les exemples ci-dessous (les mêmes que l'Application n°2), se demander si un traitement quantique est nécessaire :
 - un humain qui franchit une porte ;
 - une balle de tennis jouée sur un court de tennis ;
 - un faisceau d'électrons accélérés par une tension de 4,0 kV et bombardant du graphite :



- On s'intéresse à de l'hélium sous une pression $P = 1,0$ bar à une température $T = 2$ K. On donne la masse molaire $M = 4,0$ g/mol et la constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J.K⁻¹.

- Exprimer la longueur d'onde de de Broglie d'un atome d'hélium en fonction notamment de sa masse m et de la température. Estimer sa valeur.
- Justifier qu'on puisse observer des effets quantique de l'hélium (telle que la *superfluidité* ...)?



- En microscopie électronique, il est possible d'accéder à des détails bien plus fins qu'en utilisant la lumière visible. Justifier.
Ci-contre, une observation au microscope électronique de fibres textiles avec une tension accélératrice de 5 kV des électrons.



B.2 Interprétation probabiliste de l'expérience des fentes d'Young

Revenons à l'expérience des fentes d'Young (Figure 16) qui est invariante dans le temps (*donc la variable t n'a plus besoin d'être précisée*) et cherchons à comprendre qualitativement comment apparaissent les interférences.

► Si les particules ne peuvent passer que par F_1 :

l'état quantique de chaque particule est alors décrit par $\psi_1(x)$ tel que $p_1(x) = |\psi_1(x)|^2$. Ainsi, l'accumulation des impacts sur le détecteur décrira alors la tache de diffraction correspondante. De même, si elles ne passent que par F_2 .

► Si les particules peuvent passer soit par F_1 , soit par F_2 , mais sans qu'on cherche à le savoir :

(*rappel : c'est cette condition d'indétermination qui produisait les interférences !*)

alors, grâce au principe de superposition, on peut affirmer que la fonction d'onde décrivant l'état des particule est la superposition $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Ce qu'on pourrait formuler ainsi : **chaque particule se situe simultanément dans les deux états quantiques 1 et 2 !**

On en déduit la densité de probabilité correspondante en prenant le module au carré (en notant ψ_k^* le complexe conjugué de ψ_k) :

$$p(x) = |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2) \cdot (\psi_1^* + \psi_2^*)$$

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) + \psi_1 \psi_2^* + \psi_1^* \psi_2$$

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) + 2\text{Re}(\psi_1 \psi_2^*)$$

Ainsi, en plus du terme $p_1(x) + p_2(x)$ déjà fourni par la vision classique, apparaît bien un **terme supplémentaire lié aux interférences** : $2\text{Re}(\psi_1 \psi_2^*)$!

(R) Analogie avec les interférences de deux ondes sinusoïdales de même nature $s_1(M, t)$ et $s_2(M, t)$. On a établi que l'amplitude de vibration en un point M s'écrit :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[\Delta\varphi_{2/1}]$$

Comment faire le lien ici ? En utilisant la notation complexe il est courant de définir l'amplitude complexe de l'onde par $\underline{A}_k = A_k e^{j\varphi_k}$. Dans ce cas, l'expression précédente peut s'écrire également :

$$|\underline{A}|^2 = |\underline{A}_1|^2 + |\underline{A}_2|^2 + 2\text{Re}(\underline{A}_1 \underline{A}_2^*)$$

ce qui est tout à fait analogue à l'expression précédente $p(x) = p_1(x) + p_2(x) + 2\text{Re}(\psi_1 \psi_2^*)$ écrite sous la forme :

$$|\psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\text{Re}(\psi_1 \psi_2^*)$$

D'une manière générale, la mesure sur un système quantique est un processus communément appelé «**réduction du paquet d'onde**» : dans l'exemple des fentes d'Young, on passe du paquet d'onde $\psi_1 + \psi_2$ à une unique onde ψ_1 ou ψ_2 . Cette réduction du paquet d'onde fait donc disparaître la superposition et donc les interférences.

C Principe d'indétermination d'Heisenberg

C.1 Notion d'indétermination quantique

Dans l'approche quantique de l'étude d'une particule, **on ne peut plus prévoir à coup sûr le résultat d'une mesure** (aux incertitudes de mesure près) contrairement à une approche classique. Désormais, il subsistera toujours une part d'ombre sur ces prévisions.

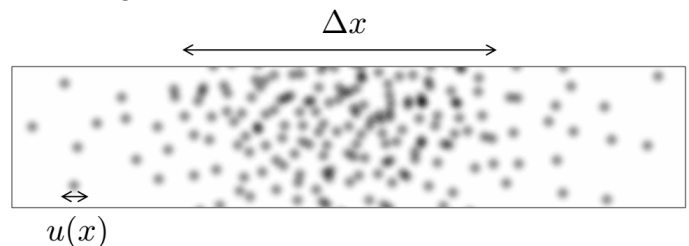
Cette part d'ombre est évaluée par l'**écart quadratique** ΔG de la grandeur G considérée et vérifiant :

$$(\Delta G)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle (G - \langle G \rangle)^2 \rangle$$

$$= \langle G^2 - 2\langle G \rangle G + \langle G \rangle^2 \rangle$$

$$= \langle G^2 \rangle - 2\langle G \rangle \langle G \rangle + \langle G \rangle^2$$

$$(\Delta G)^2 = \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2$$



Dans le cadre de la physique quantique, on appellera ΔG , l'**indétermination quantique de la grandeur G** .

(R) **ATTENTION** à ne pas confondre cette **indétermination quantique** ΔG avec l'**incertitude de mesure** $u(G)$!! Il est tout fait possible que $u(G) \ll \Delta G$, c'est d'ailleurs ce qui permet d'observer la nature probabiliste d'un système quantique.

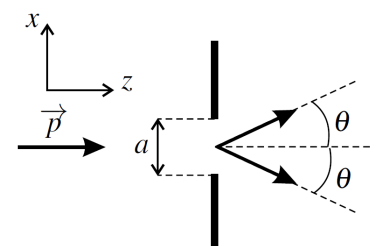
C.2 Inégalité d'Heisenberg

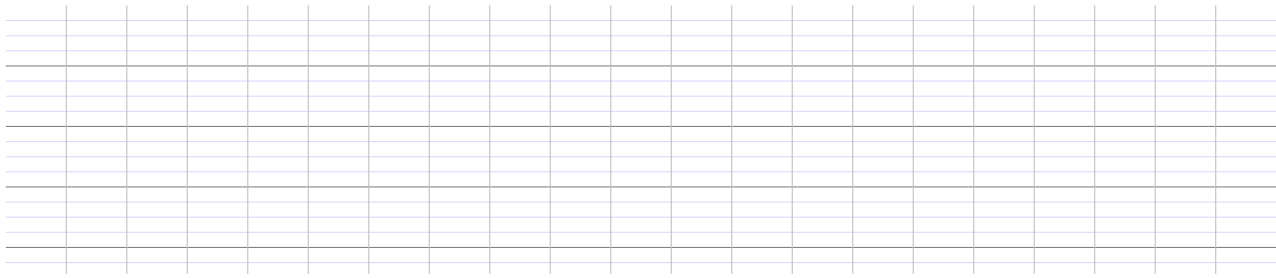
► **Mise en évidence dans un cas particulier : étude de la diffraction par une fente**

On s'intéresse à la diffraction de la lumière à travers une fente de largeur a .

Nous savons que l'échelle angulaire θ délimitant le cône de lumière de la tache principale de diffraction vérifie :

$$\sin \theta \simeq \frac{\lambda}{a}$$





On obtient ainsi une quantification des rayons r_n des différentes orbites possibles :



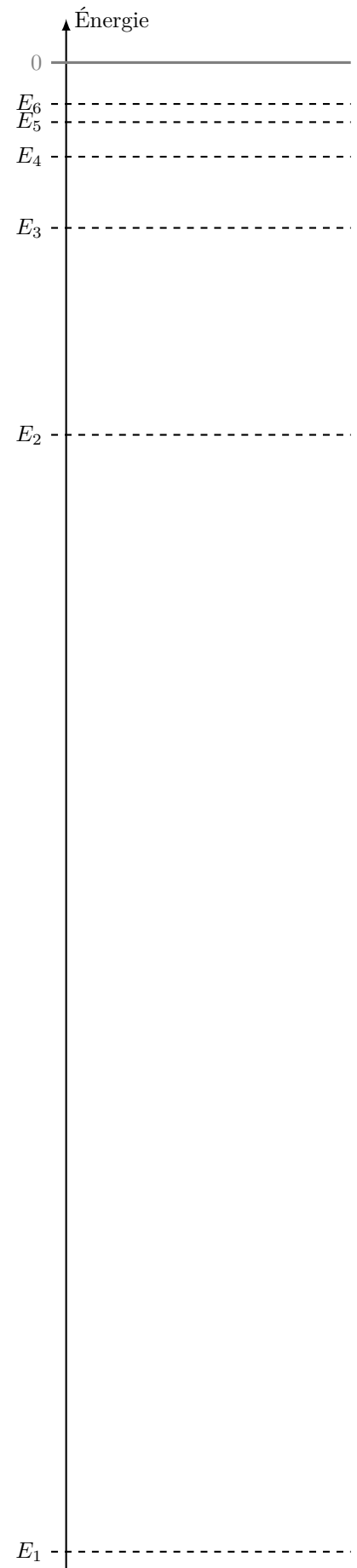
c. Quels sont les niveaux d'énergie accessibles à l'électron ?



n	1	2	3	4	5	6	...
E_n (eV)	-13,6	-3,4	-1,51	-0,86	-0,544	-0,378	...

d. Formule de Rydberg-Ritz

La formule de Rydberg-Ritz $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{m^2} \right)$, où p et m sont des entiers, a déjà été établie empiriquement en 1888 et donne les longueurs d'onde des raies d'émission et d'absorption de l'hydrogène. Le modèle Bohr (en 1913) permet d'expliquer cette formule, en considérant qu'un électron sur l'orbite initiale $n_i = m$ se désexcite vers l'orbite finale $n_f = p$ en libérant un photon d'énergie $h\nu = E_{n_i} - E_{n_f}$:



e. Un modèle triomphant ! ...

Triomphe, car on put enfin expliquer le spectre de l'atome d'hydrogène ! Par exemple, les raies déjà mesurées de la série Balmer (*raies de l'hydrogène dans le visible*) :

λ_{exp} (nm)	656,3	486,1	434,0	410,2
----------------------	-------	-------	-------	-------

peuvent après coup être interprétées comme un retour de l'électron à la couche K, correspondant à $n_f = 2$. En effet, en exploitant la formule de Rydberg précédente dans le cas $n_f = 2$ ($\lambda_{th} = \frac{1}{R_H} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n_i^2} \right)^{-1}$), on obtient les longueurs d'ondes théoriques ci-dessous :

n_i	3	4	5	6
λ_{th} (nm)	656,3	486,2	434,1	410,2

f. ... mais un modèle qui présente des limites

Ce modèle exploite la notion de trajectoire pourtant incompatible avec le principe d'indétermination d'Heisenberg.

Par ailleurs, le modèle de Bohr ne s'applique pas pour des atomes ou ions à plusieurs électrons.

Cette approche semi-classique aura toutefois été une étape très importante dans le développement de la physique quantique.

c. Longueurs d'onde possibles pour la particule

On a déjà vu, lors de l'étude des modes propres d'une corde, qu'une onde confinée était stationnaire, à cause des conditions aux limites, ne peut accepter que certaines valeurs de longueur d'onde.

Il en sera de même pour les ondes de de Broglie. On peut donc raisonner en terme de nœuds et de ventres. Notamment, les deux «murs» agissent comme des nœuds de vibrations de l'onde de probabilité car la probabilité que la particule se trouve en $x = 0$ ou $x = \ell$ est nulle. Or, la distance entre deux nœuds pour une stationnaire harmonique correspond à un nombre entier de la demi-longueur d'onde, d'où :



d. Niveaux d'énergie possibles

À l'intérieur du puits, l'énergie mécanique E de la particule est simplement égale à E_c puisque $E_p = 0$. On peut en déduire aisément les niveaux d'énergies possibles :



Ainsi, **l'énergie de la particule est quantifiée** et ne peut prendre que certaines valeurs.

L'écart entre deux niveaux d'énergie consécutifs est :

$$E_{n+1} - E_n = (2n + 1) \frac{h^2}{8m\ell^2}$$

Cet écart augmente donc avec n .

Le niveau $n = 1$ correspond à l'**état fondamental** (pour reprendre les termes utilisés dans l'étude des ondes). Les autres niveaux d'énergie correspondent à des **états excités**.

(R) En mécanique classique, l'énergie minimale serait nulle et l'énergie pourrait prendre n'importe quelle valeur **continuement**. Désormais, pour une particule quantique, l'énergie ne peut évoluer que par saut (évolution discrète).

(R) Les transitions possibles entre les niveaux peuvent par exemple s'effectuer par échange de photon d'énergie :

$$h\nu = |E_n - E_{n'}| = |n^2 - n'^2| \frac{h^2}{8m\ell^2}$$

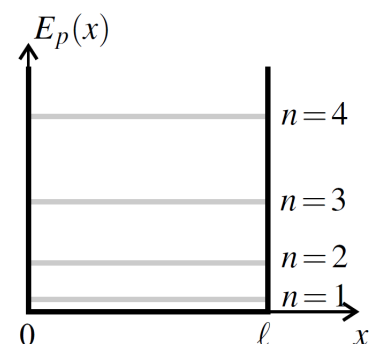


Figure 20 – Les quatre premiers niveaux