Compression lente ou brutale d'un gaz parfait

1. L'équilibre des forces sur le système {piston + masse m} donne :

$$-P_0 S \vec{u_z} - mg\vec{u_z} + P_2 S \vec{u_z} = \vec{0}$$

avec $\vec{u_z}$ orienté vers le haut.

$$\boxed{P_2 = P_0 + \frac{mg}{S}}$$

<u>AN</u> :
$$P_2 = 1{,}013 \cdot 10^5 + \frac{5{,}0 \times 9{,}81}{\underbrace{10{,}0 \cdot 10^{-4}}}$$

$1\ cm^2 = (10^{-2}\ m)^2 = 10^{-4}\ m^2$

$$P_2 = 1{,}013 \cdot 10^5 + 0{,}49 \cdot 10^5$$

$$\boxed{P_2 = 1{,}50 \cdot 10^5 \text{ bar}}$$

2. (a) On peut appliquer la loi de Laplace (transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait)

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$

$$\boxed{V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

<u>AN</u> :
$$V_2 = 50{,}0\ cm^3 \left(\frac{1{,}013 \cdot 10^5}{1{,}50 \cdot 10^5}\right)^{\frac{1}{1{,}4}}$$

$$\boxed{V_2 = 37{,}7\ cm^3}$$

(b) On a
$$\begin{cases} P_2 V_2 = nRT_2 \\ P_1 V_1 = nRT_1 \end{cases}$$

D'où
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1}$$
$$= \frac{P_2}{P_1}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/\gamma}$$
$$\boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

AN : $\boxed{T_2 = 328 \text{ K}}$

(c) 1ère méthode : utiliser $W = -\int_{V_1}^{V_2} P_{ext}\, dV$

avec $P_{ext} = P$ (transformation réversible)

et $P = (P_1 V_1)^{\gamma} \frac{1}{V^{\gamma}}$ (loi de Laplace)

$\Rightarrow$ FASTIDIEUX ! ...

2ème méthode

1er principe : $\Delta U = W + Q$ avec $Q = 0$

et $\Delta U = C_V \Delta T$
$$= \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$$

D'où $W = \frac{1}{\gamma-1}(nRT_2 - nRT_1)$
$$\boxed{W = \frac{1}{\gamma-1}(P_2 V_2 - P_1 V_1)}$$

AN : $\boxed{W = 1{,}51 \text{ J}}$

3. (a) Pour le système {piston + masse} :

$$m\ddot{z}\,\vec{u_z} = -mg\,\vec{u_z} + \vec{F}_{gaz/piston} - P_0 S\,\vec{u_z}$$

Or $\vec{F}_{gaz/piston} = -\vec{F}_{piston/gaz}$ (principe des actions réciproques)

$$= -\left(-P_{ext} S \vec{u_z}\right)$$

D'où $m\ddot{z} = -mg + P_{ext} S - P_0 S$

$$P_{ext} = P_0 + \frac{mg}{S} + \frac{m\ddot{z}}{S}$$

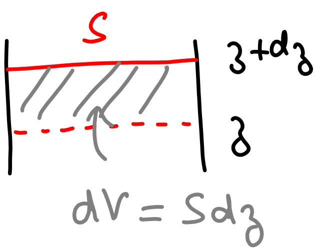
$$\boxed{P_{ext} = P_2 + \frac{m\ddot{z}}{S}}$$

(b) (Question pas évidente ...)

On a $W = \int_{V_1}^{V_2} -P_{ext}\,dV$

$$= -P_2 \int_{V_1}^{V_2} dV - \frac{m}{S}\int_{V_1}^{V_2} \ddot{z}\,dV$$

Or $dV = S\,dz$



d'où $\ddot{z}\,dV = \ddot{z}\,dz\,S$

$$= \ddot{z}\,\dot{z}\,dt\,S$$

$dz = \frac{dz}{dt}dt$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{z}^2\right) dt\; S$$

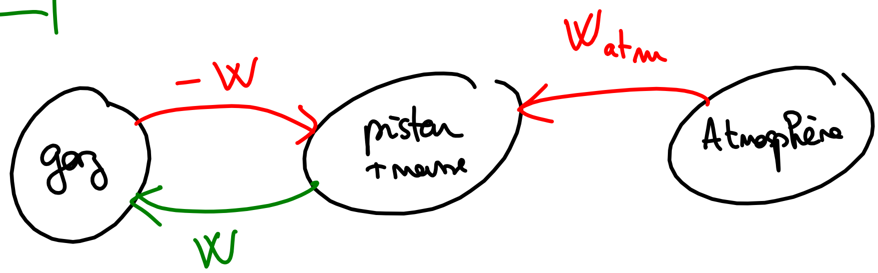
Ainsi : $$W = -P_2(V_2 - V_1) - m\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{z}^2\right)dt$$

$$= -P_2(V_2 - V_1) - m\left[\frac{1}{2}\dot{z}^2\right]_{t_1}^{t_2}$$

Or $\dot{z}(t_1) = \dot{z}(t_2) = 0$

Il reste donc : $\boxed{W = P_2(V_1 - V_2)}$

Rmq : autre méthode



Appliquons le 1er principe au système {piston + masse} :

$$\underbrace{\Delta U}_{=0} + \underbrace{\Delta E_c}_{\substack{=0-0\\=0}} + \Delta E_p = W_{atm} + (-W)$$

(pas de variation de température)

$$\underbrace{mg\Delta z}_{dV = S\,dz} = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{-P_{atm}\,S\,\vec{u_z}\cdot\vec{v}}_{\text{puissance}}\,.dt - W$$

puissance de $\vec{F}_{atm/piston} = -P_{atm}\,S\,\vec{u_z}$

$$mg\frac{\Delta V}{S} = \int_{t_1}^{t_2} -P_{atm}\underbrace{S\,\dot{z}dt}_{= S dz = dV} - W$$

$$\frac{mg}{S}(V_2 - V_1) = -P_{atm}(V_2 - V_1) - W$$

On retrouve bien $W = P_2(V_1 - V_2)$.

(c) Appliquons le 1er principe au système {gaz}

$$\Delta U = W + Q \quad \text{avec} \quad Q = 0$$

$$C_v \Delta T = W$$

$$\frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = P_2 V_1 - P_2 V_2$$

$$= P_2 \frac{nRT_1}{P_1} - nRT_2$$

D'où $$\underbrace{\left(\frac{1}{\gamma-1} + 1\right)}_{= \frac{\gamma}{\gamma-1}} T_2 = T_1 \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{P_2}{P_1} \right)$$

$$\boxed{T_2 = \frac{T_1}{\gamma}\left[1 + (\gamma - 1)\frac{P_2}{P_1}\right]}$$

AN : $\boxed{T_2 = 333 \text{ K}}$

(d) On a : $P_2 V_2 = nRT_2$

$$P_2 V_2 = \frac{1}{\gamma} \underbrace{nRT_1}_{= P_1 V_1} \left[1 + (\gamma - 1)\frac{P_2}{P_1}\right]$$

D'où $$V_2 = \frac{1}{\gamma} V_1 \frac{P_1}{P_2}\left[1 + (\gamma - 1)\frac{P_2}{P_1}\right]$$

$$\boxed{V_2 = \frac{V_1}{\gamma}\left[\frac{P_1}{P_2} + \gamma - 1\right]}$$

laisser V_1 en cm^3 pour l'AN

AN : $\boxed{V_2 = 38{,}3 \text{ cm}^3}$

D'où $\quad W = P_2 (V_1 - V_2)$

$$\boxed{W = 1{,}75\,J}$$

(e)

	T_2	V_2	W
1 Compression réversible	328 K	37,7 cm³	1,51 J
2 Compression brutale	333 K	38,3 cm³	1,75 J

L'apport d'énergie est plus important dans le cas 2 grâce au mouvement du piston qui a pu occasionné une puissance des forces extérieures de pression plus importante.

Ainsi, l'énergie interne et donc la température ont pu augmenté plus fortement
$(\Delta U = C_V \Delta T = W)$

En contrepartie, pour une même pression finale P_2 la température T_2 étant plus importante, alors le volume V_2 aussi $\left(V_2 = \frac{nRT_2}{P_2}\right)$.