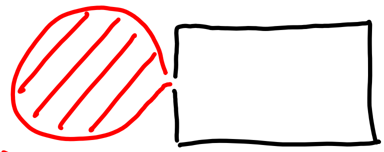
Identifions le système d'étude.

Etat initial

P_0, T_0



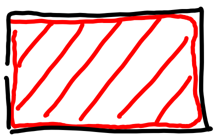
$P_i = P_0$

$T_i = T_0$

$V_i = \dfrac{nRT_0}{P_0}$

Etat final

P_0, T_0



T_f ?

Appliquons le 1er principe :

$$\Delta U = W + Q$$

Supposons $Q = 0$ (sinon l'exercice n'a aucun intérêt : $T_f = T_0$ à l'équilibre thermique final)

Et $W = W_{pression}$

La pression extérieure étant constante et agissant de manière motrice :

$$W = P_0 V_{balayé}$$
$$= P_0 V_i$$
$$= nRT_0$$

D'où, avec $\Delta U = C_v \Delta T = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_0)$:

$$\frac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_0) = nRT_0 \implies \boxed{T_f = \gamma T_0}$$

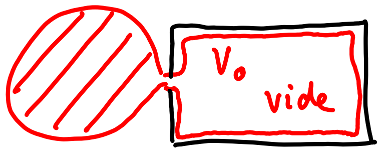
AN : $T_f = 410\ K$

pour $T_0 = 293\ K$ (20°C)

On aurait pu raisonner aussi sur le système suivant :

État initial

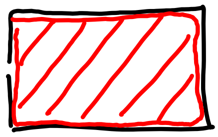
P_0, T_0



volume total initial $V_i = \frac{nRT_0}{P_0} + V_0$

État final

P_0, T_0



$V_f = V_0$

T_f ?

Appliquons le 1er principe :

$$\Delta U_{gaz} + \Delta U_{vide} = W + Q$$

Or $Q = 0$ comme précédemment.

Et $W = W_{pression} = -\int_i^f P_{ext}\, dV$ (ici, on peut utiliser ce résultat de cours)

La pression extérieure étant constante ($P_{ext} = P_0$) :

$$W = W_p = -P_0 \int_i^f dV$$

$$= -P_0 \left(V_f - V_i\right)$$

$$= -P_0\left(-\frac{nRT_0}{P_0}\right)$$

$$W = nRT_0$$

De plus, $\Delta U_{vide} = 0 - 0$ (puisqu'il s'agit de vide !)

D'où, avec $\Delta U_{gaz} = C_V \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_0)$:

$$\frac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_0) = nRT_0 \Rightarrow \boxed{T_f = \gamma T_0}$$

On retrouve bien le même résultat.