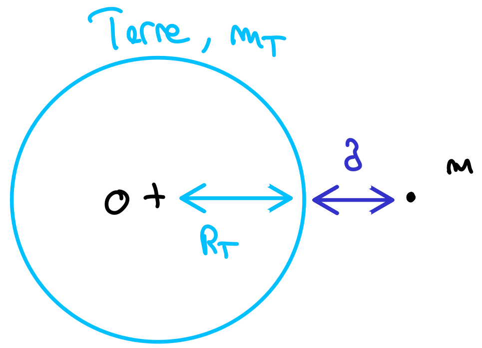
Atmosphère isotherme avec champ de pesanteur variable

1] Si une masse m ponctuelle est située à $r = R_T + z$



elle est soumise à une force d'intensité :

$$\frac{G m m_T}{(R_T+z)^2} = m\, g(z)$$

où $g(z) = \dfrac{G m_T}{(R_T+z)^2}$ → champ de pesanteur terrestre

$$\boxed{g(z) = \frac{g_0 R_T^2}{(R_T+z)^2} \ , \quad \text{où} \quad \underbrace{g_0}_{= g(z=0)} = \frac{G m_T}{R_T^2}}$$

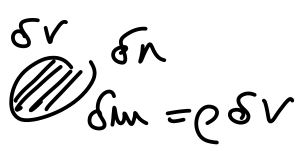
2] D'après l'équation locale de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \rho \vec{g} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho g$$

en projetant suivant $\vec{u_z}$

Or $P \delta V = \delta n R T_0$

$$= \frac{\rho \delta V}{M} R T_0$$



D'où $\rho = \dfrac{PM}{RT_0}$

Ainsi :
$$\frac{dP}{dz} = - \frac{P(z)\, M\, g(z)}{R T_0}$$

Utilisons la méthode de séparation des variables :
$$\frac{dP}{P} = - \frac{M}{R T_0} g(z)\, dz$$

Intégrons entre 0 et z :
$$\int_{P(0)}^{P(z)} \frac{dP}{P} = - \frac{M g_0 R_T^2}{R T_0} \int_0^z \frac{dz}{(R_T + z)^2}$$

$$\left[\ln P \right]_{P_0}^{P(z)} = - \frac{M g_0 R_T^2}{R T_0} \left[- \frac{1}{R_T + z} \right]_0^z$$

$$\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \frac{M g_0 R_T^2}{R T_0} \left(\frac{1}{R_T + z} - \frac{1}{R_T} \right)$$

Ainsi :
$$\boxed{P(z) = P_0 \exp\left[\frac{M g_0 R_T^2}{R T_0} \left(\frac{1}{R_T + z} - \frac{1}{R_T} \right) \right]}$$

Dans la limite $z \ll R_T$ pour pouvoir considérer $g(z) \simeq g_0$ uniforme, on obtient :
$$\frac{1}{R_T + z} - \frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_T}(1+\varepsilon)^{-1} - \frac{1}{R_T} \qquad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{z}{R_T} \ll 1$$
$$\simeq \frac{1}{R_T}(1 - \varepsilon) - \frac{1}{R_T}$$
$$\simeq \frac{-z}{R_T^2}$$

On retrouve donc $P(z) = P_0 \exp\left(- \frac{M g_0 z}{R T_0}\right)$ expression obtenue en cours précisément dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme.