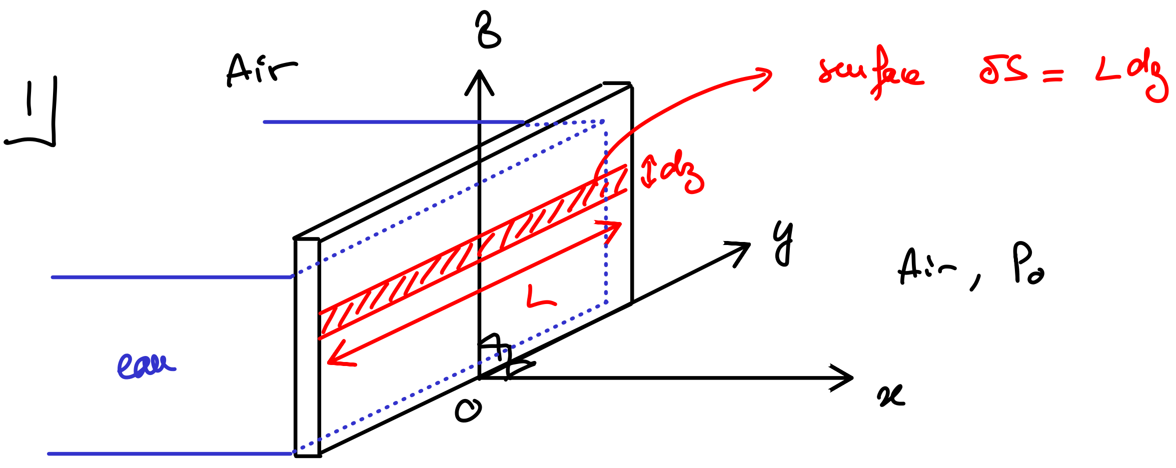
Barrage

1)



$$\delta\vec{F} = \underbrace{P}_{\text{pression de l'eau}}\,\delta S\,\vec{u_x} - \underbrace{P_{air}}_{=P_0}\,\delta S\,\vec{u_x}$$

$P(z) = ?$

D'après l'équation locale de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \rho\vec{g}$$

Projetons suivant $\vec{u_z}$:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

Intégrons entre h et z :

$$[P(z)]_h^z = -\rho g\,[z]_h^z$$

$$P(z) - \underbrace{P(h)}_{=P_0} = \rho g\,(h - z)$$

$$\boxed{P(z) = P_0 + \rho g\,(h - z)}$$

Ainsi $\boxed{\delta\vec{F} = \rho g\,(h - z)\,\delta S\,\vec{u_x} \quad \text{où} \quad \delta S = L\,dz}$

2) $\delta\vec{F} = \delta F_x \, \vec{u_x}$ où $\delta F_x = \rho g (h - z) L \, dz$

Ainsi $\boxed{\vec{F} = F_x \, \vec{u_x}}$

où $$F_x = \int_{z=0}^{h} \delta F_x$$

$$= \int_{z=0}^{h} \rho g (h - z) L \, dz$$

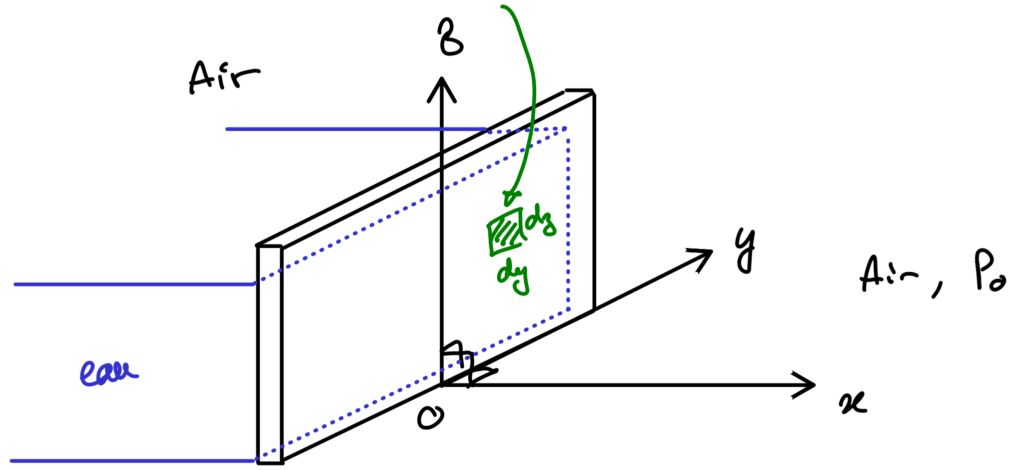
$$= \rho g L \left[h z - \frac{z^2}{2} \right]_0^h$$

$$\boxed{F_x = \frac{1}{2} \rho g L h^2}$$

<u>Rmq</u> : Autre méthode.

Si on s'intéresse à un élément de surface :

$\delta^2 S = dy \, dz$ infiniment petit <u>d'ordre 2</u>



alors $$\delta^2 \vec{F} = \underbrace{\rho g (h - z)}_{\delta^2 F_x} \, dy \, dz \, \vec{u_x}$$ désormais.

Ainsi : $$F_x = \iint \delta^2 F_x$$

$$F_x = \int_{y=-\frac{L}{2}}^{y=\frac{L}{2}} \underbrace{\left(\int_{z=0}^{H} \rho g (h - z)\, dz \right)}_{\text{à intégrer par rapport à } y \text{ mais indépendant de } y \text{. Donc}} dy$$

$$= \int_{y=-\frac{L}{2}}^{y=\frac{L}{2}} dy \times \int_{z=0}^{H} \rho g (h-z)\, dz$$

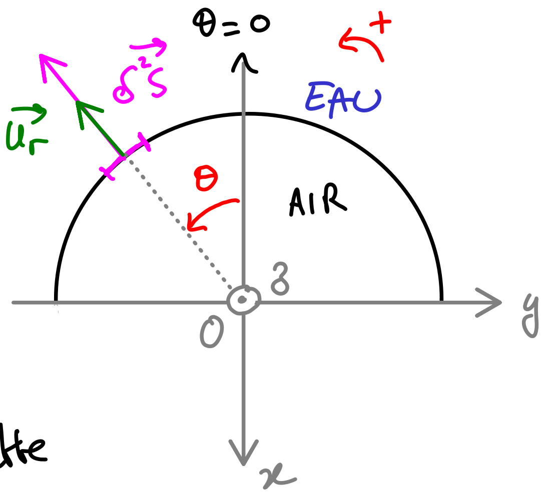
$$= \left[y \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \times \rho g \left[h z - \frac{z^2}{2} \right]_0^H$$

$$F_x = \frac{1}{2} \rho g L h^2$$

On retrouve bien le même résultat.

3) En repérage cylindrique :

$$\overrightarrow{\delta^2 S} = R\, d\theta\, dz\, \vec{u_r}$$

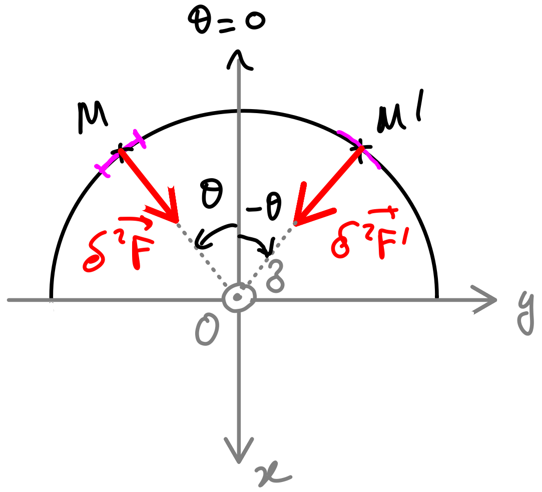


La force de pression sur cette surface est :

$$\overrightarrow{\delta^2 F} = P_{air}\, \overrightarrow{\delta^2 S} - P_{eau}\, \overrightarrow{\delta^2 S} \quad , \quad \text{où} \quad P_{eau} = P_0 + \rho g (h - z)$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta^2 F} = -\rho g (h - z)\, R\, d\theta\, dz\, \vec{u_r}}$$

4] Pour 2 points M et M' de positions angulaires θ et $\theta' = -\theta$, les composantes de $\delta^2\vec{F}$ et $\delta^2\vec{F'}$ suivant $\vec{u_y}$ se compensent par symétrie :



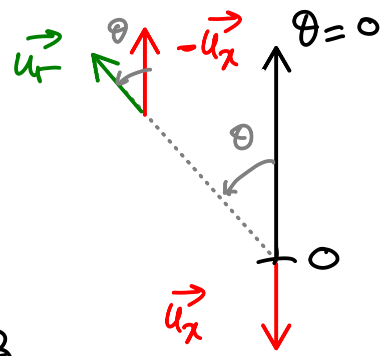
D'où une résultante des forces de pression suivant $\vec{u_x}$:

$$\boxed{\vec{F} = F_x \vec{u_x}}$$

où $F_x = \iint \delta F_x$

$$\boxed{F_x = \iint \delta\vec{F}.\vec{u_x}}$$

5] $\vec{u_r}.(-\vec{u_x}) = \cos\theta$



D'où $\delta F_x = \delta\vec{F}.\vec{u_r}$

$$\boxed{\delta F_x = \rho g(h-z) R\cos\theta \, d\theta \, dz}$$

Ainsi :
$$F_x = \int_{z=0}^{h}\left(\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\rho g(h-z)}_{\text{indépendant de } \theta} R\cos\theta \, d\theta\right) dz$$

$$= \int_{z=0}^{h} \rho g(h-z)\underbrace{\left(\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} R\cos\theta \, d\theta\right)}_{\text{indépendant de } z} dz$$

d'où

$$= \int_{z=0}^{h} \rho g(h-z)\, dz \times \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R\cos\theta \, d\theta$$

$$= \rho g\left[hz - \frac{z^2}{2}\right]_0^h \times R\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\rho g h^2 \times R\left(1-(-1)\right)$$

$$\boxed{F_x = \frac{1}{2}\rho g L h^2} \quad \text{car} \quad R = \frac{L}{2}$$

Il s'agit du même résultat que pour le barrage plan de longueur L.
Néanmoins, la structure hémicylindrique offrira plus de résistance car elle reporte les forces vers les bords du barrage.