Soulèvement d'une cloche

Le soulèvement aura lieu si $\|\vec{F}_p\| > \|m\vec{g}\|$

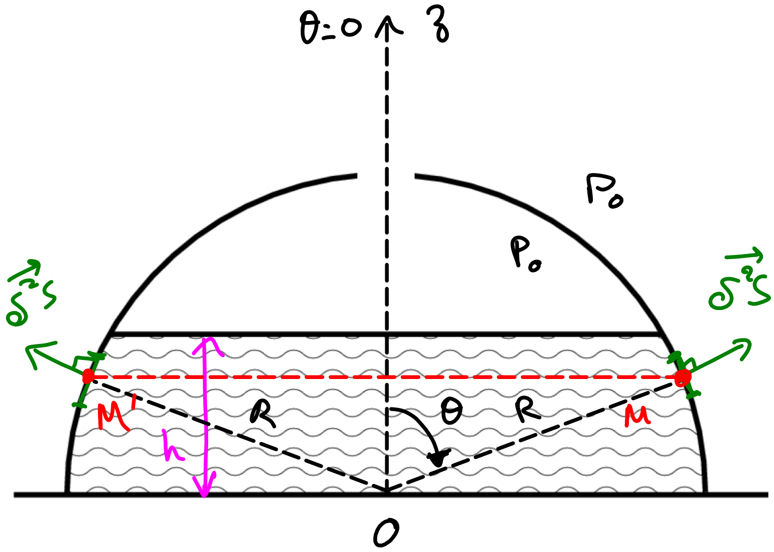
poids de la cloche

Résultante des forces de pression

↳ **Que vaut $F_p = \|\vec{F}_p\|$?**

Par symétrie, les composantes horizontales des forces $\delta^2\vec{F}_p$ se compensent.

Donc $\boxed{\vec{F}_p = F_{pz}\,\vec{u}_z = F_p\,\vec{u}_z}$



Ainsi : $F_p = F_{pz} = \iint \delta^2 F_{pz}$

où $\delta^2 F_{pz} = \delta^2\vec{F} \cdot \vec{u}_z$

① $P(z) = ??$ pour $z < h$

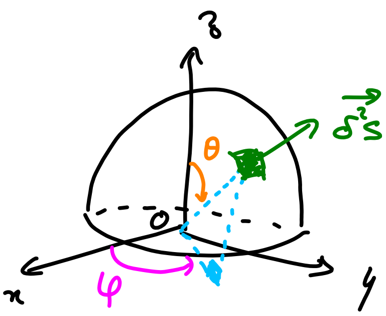
On a : $\dfrac{dP}{dz} = -\rho g \Rightarrow P(z) = -\rho g z + \text{constante}$

Or $P(h) = P_0 \Rightarrow \text{constante} = P_0 + \rho g h$

D'où $\boxed{P(z) = P_0 + \rho g(h - z)}$ pour $z < h$

② $\delta^2 F_{Pz} = ??$

$$\delta^2\vec{F}_P = \underbrace{P(M)\,\delta^2\vec{S}}_{\text{action de l'eau}} - \underbrace{P_0\,\delta^2\vec{S}}_{\text{action de l'air}}$$



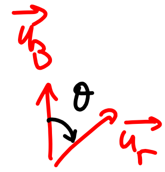
$$\boxed{\delta^2\vec{F}_P = \left(P(z) - P_0\right) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{u}_r}$$

$$\begin{cases} \text{pour } z > R, \quad P(z) = P_0, \text{ donc } \delta^2\vec{F}_P = \vec{0} \\ \text{Pour } z < R, \quad P(z) = P_0 + \rho g (h - z), \text{ donc } \delta^2\vec{F}_P \neq \vec{0} \end{cases}$$

Ainsi

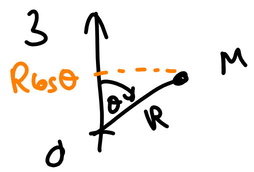
$$\delta^2 F_{Pz} = \delta^2\vec{F}_P \cdot \vec{u}_z$$

$$= \rho g (h - z) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z}_{= \cos\theta}$$



$$\boxed{\delta^2 F_{Pz} = \rho g (h - z) R^2 \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}$$

Par ailleurs : $z = R\cos\theta$



Donc $\delta^2 F_{Pz} = \rho g (h - R\cos\theta) R^2 \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$= \rho g R^2 (h X - R X^2) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

changement de variable d'intégration ...

où $\boxed{X = \cos\theta}$

$$\Rightarrow \frac{dX}{d\theta} = -\sin\theta$$

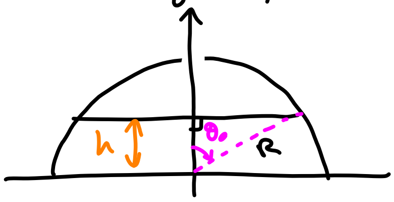
$$\Rightarrow \sin\theta \, d\theta = -dX$$

donc $\boxed{\delta^2 F_{Pz} = \rho g R^2 (R X^2 - h X) \, dX \, d\varphi}$

3) $F_p = ?$

D'où $$F_p = F_{pz} = \rho g R^2 \iint_{\substack{\text{surface} \\ \text{immergée}}} (Rx^2 - hx)\,dx\,d\varphi$$

Pour couvrir toute la partie immergée, il faut que $\theta \in \left[\theta_0, \frac{\pi}{2}\right]$ où :



$$R\cos\theta_0 = h$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_0 = \cos\theta_0 = \frac{h}{R}.$$

AINSI :

$$F_p = \rho g R^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{\left(\int_{x_0}^{\cos\frac{\pi}{2} = 0} (Rx^2 - hx)\,dx \right)}_{\text{indépend de } \varphi} d\varphi$$

$$= \rho g R^2 \int_{x_0}^{0} (Rx^2 - hx)\,dx \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \rho g R^2 \left[\frac{1}{3} R x^3 - \frac{h x^2}{2} \right]_{x_0}^{0} \cdot \left[\varphi \right]_0^{2\pi}$$

$$F_p = \rho g R^2 \left(\frac{1}{2} h x_0^2 - \frac{1}{3} R x_0^3 \right) \cdot 2\pi$$

$$= \rho g R^2 \left(\frac{1}{2} h \left(\frac{h}{R}\right)^2 - \frac{1}{3} R \left(\frac{h}{R}\right)^3 \right) 2\pi$$

$$= 2\pi \rho g R^2 \left(\frac{h^3}{2R^2} - \frac{h^3}{3R^2} \right)$$

$$= 2\pi \rho g h^3 \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)}_{= \frac{1}{6}}$$

$$\boxed{F_P = \frac{1}{3}\pi \rho g h^3}$$

4) Condition de soulèvement

Il faut : $F_P > mg$ pour le soulèvement

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\pi \rho h^3 > m$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\boxed{h > \left(\frac{3m}{\rho \pi}\right)^{1/3}}}$$