

Chapitre 6 : Statique des fluides

Prérequis

- Notions élémentaires de mécanique
- Notions de pression et température
- Loi des gaz parfaits

Mots-clés

force surfacique de pression, force volumique de pression, équation locale de la statique des fluides, modèle de l'atmosphère isotherme, facteur de Boltzmann, poussée d'Archimède



PLAN DU COURS

A

Équation de la statique des fluides

- A.1** Forces surfacique et volumique de pression
- A.2** Équation locale de la statique des fluides
- A.3** Cas particulier d'un champ de pesanteur uniforme

B

Deux applications importantes

- B.1** Application à l'étude de l'atmosphère
- B.2** Application à l'étude d'un fluide incompressible

C

Résultante des forces de pression exercée par un fluide

- C.1** Éléments de surface
- C.2** Résultante des forces de pression
- C.3** Cas de la poussée d'Archimède



LES SAVOIRS ET LES SAVOIR-FAIRE

A Équation de la statique des fluides



CAPACITÉS EXIGIBLES

- ★ Citer des exemples de forces surfaciques ou volumiques.
- ★ Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide d'un gradient.
- ★ Établir l'équation locale de la statique des fluides.

A.1 Forces surfacique et volumique de pression

1. Quelle est la force surfacique $\vec{f}_{s,pression}$ s'exerçant sur une surface δS ?
2. Établir l'expression de la force volumique $\vec{f}_{v,pression}$ s'exerçant sur une surface δV à l'aide du gradient de pression.

A.2 Équation locale de la statique des fluides

3. Établir l'équation locale de la statique des fluides.
4. Connaissant le sens du champ de pesanteur, comment en déduire le sens de variation de la pression ?

A.3 Cas particulier d'un champ de pesanteur uniforme

5. Dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme et d'un vecteur unitaire \vec{u}_z orienté vers le haut, justifier que la pression ne dépende que de z et préciser comment simplifie l'équation locale de la statique des fluides ?
6. Même question dans le cas où \vec{u}_z orienté vers le bas.

B Deux applications importantes



CAPACITÉS EXIGIBLES

- ★ Citer des ordres de grandeur des champs de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère.
- ★ Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et homogène et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.

B.1 Application à l'étude de l'atmosphère

7. Rappeler les hypothèses du modèle employé et établir l'expression du profil vertical de pression $P(z)$.
8. Identifier le facteur de Boltzmann et en donner une interprétation statistique. Évoquer notamment le rôle de l'agitation thermique.

B.2 Application à l'étude d'un fluide incompressible

9. Qu'implique l'hypothèse d'incompressibilité concernant la masse volumique ?
10. Suivant le choix d'orientation de \vec{u}_z , établir une loi de conservation faisant intervenir la pression P et z .
11. Comment s'exprime le champ de pression $P(z)$ dans un volume d'eau (pression P_0 à la surface libre avec l'air, axe Oz orienté vers le bas) ?



C Résultante des forces de pression exercée par un fluide



CAPACITÉS EXIGIBLES

- ★ Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adaptées.
- ★ Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression.
- ★ Évaluer une résultante de forces de pression.
- ★ Expliquer l'origine de la poussée d'Archimède.
- ★ Exploiter la loi d'Archimède.

C.1 Éléments de surface

12. Comment s'exprime une surface élémentaire sur une surface plane en repérage cartésien ? et en repérage polaire ?
13. Comment s'exprime une surface élémentaire sur une surface cylindrique en repérage cylindrique ?
14. Comment s'exprime une surface élémentaire sur une surface sphérique en repérage sphérique ?

C.2 Résultante des forces de pression

15. Connaissant la géométrie d'une surface et le champ de pression du fluide en contact avec la surface, comment en déduire la résultante des forces de pression agissant sur cette surface ?
16. Comment exploiter les propriétés de symétrie communes de la surface et du champ de pression. Illustrer à l'aide d'un exemple.

C.3 Cas de la poussée d'Archimède

17. Rappeler l'expression de la poussée d'Archimède et expliquer son origine physique.



Le facteur de Boltzmann

► Exemple de l'atmosphère isotherme

Dans le cas du modèle de l'atmosphère isotherme, on a établi l'expression de la densité particulaire :

$$n^*(z) = n_0^* e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

où $n_0^* = \frac{P_0}{k_B T}$ est la densité particulaire au niveau du sol, P_0 étant la pression au niveau du sol, et m est la masse d'une particule.

Il apparaît le **facteur de Boltzmann** que l'on retrouve très souvent en physique statistique et qui s'écrit ici $e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$, facteur décrivant la probabilité qu'a une particule d'être située au niveau d'énergie mgz (énergie potentielle de pesanteur) et donc d'être située à une certaine altitude z .

Plus précisément, il vaut mieux parler de loi de probabilité $p(z)$:

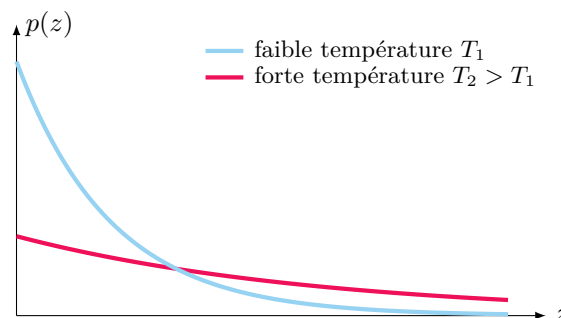
la probabilité qu'a une particule d'être située entre z et $z + dz$ est $p(z)dz$, où $p(z) = A e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$

Ainsi la probabilité qu'a une particule d'être située entre z_1 et z_2 à une température T donnée est $\int_{z_1}^{z_2} p(z)dz$.

Comment déterminer la constante A ? → Par « normalisation » Cela consiste à dire qu'il y a 100% de chance de trouver la particule entre $z = 0$ et l'infini. D'où :

$$\int_0^{\infty} p(z)dz = 1 \Rightarrow A \left[-\frac{k_B T}{mg} e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \right]_0^{\infty} = 1 \Rightarrow A = \frac{mg}{k_B T}$$

Influence de la température Voici ci-dessous le tracé de $p(z)$ pour deux températures différentes $T_1 < T_2$:



Quelle en est l'origine physique ? Dans le facteur de Boltzmann apparaît un terme homogène à une énergie, $k_B T$, déjà rencontré ($\frac{3}{2}k_B T$ représente l'énergie cinétique moyenne de translation d'une molécule de gaz parfait) et qui est représentatif de l'énergie d'agitation thermique.

L'agitation thermique tend à homogénéiser le gaz, et donc à rendre uniforme $n^*(z)$ ainsi que $p(z)$ (et $P(z)$, et $\rho(z)$ aussi).

À l'inverse, la valeur de l'énergie potentielle mgz tend à diminuer sous l'effet du poids et donc à ramener les particules au sol.

Il apparaît donc une « compétition » entre ces deux termes énergétiques :

- plus la température est forte (cas $T = T_2$), plus $k_B T$ tend à « l'emporter » sur le terme mgz et donc les particules peuvent s'élever en altitude ;
- plus la température est faible (cas $T = T_1$), plus mgz tend à « l'emporter » sur le terme $k_B T$ et donc les particules ont plutôt tendance à retomber au sol.



- (R) Quel est le lien entre la loi de probabilité $p(z) = \frac{mg}{k_B T} e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$ et l'expression de la densité particulaire $n^*(z) = n_0^* e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$?

Imaginons pour cela une colonne verticale cylindrique d'atmosphère de surface S de taille infinie. Notons N le nombre total de particules qu'elle contient. Ces particules se répartissent suivant l'axe Oz en suivant la loi de probabilité $p(z)$. Ainsi, dans un volume mésoscopique $\delta V = Sdz$, nous avons une quantité $\delta N = n^*(z)\delta V$ de particules correspondant à une fraction $p(z)dz$ de N :

$$\begin{aligned} n^*(z)\delta V &= N p(z)dz \\ n^*(z)Sdz &= N p(z)dz \\ n^*(z) &= \frac{Np(z)}{S} \\ n^*(z) &= \frac{Nmg}{Sk_B T} e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \end{aligned}$$

Retrouve-t-on bien $n^*(z) = n_0^* e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$ avec $n_0^* = \frac{P_0}{k_B T}$?

Autrement dit, comment justifier que $P_0 S = Nmg$?

L'équilibre des forces sur la colonne donne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{sol/air}} + \overrightarrow{\text{poids de la colonne}} &= \vec{0} \\ -\overrightarrow{F_{air/sol}} + \overrightarrow{\text{poids de la colonne}} &= \vec{0} \\ -(-P_0 S \vec{u}_z) - Nmg \vec{u}_z &= \vec{0} \\ P_0 S &= Nmg \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de la loi de probabilité $p(z)$ faisant intervenir le facteur de Boltzmann $e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$, on retrouve bien l'expression de $n^*(z)$!

- (R) Il y a bien sûr un souci dans ce modèle de l'atmosphère isotherme : le fait qu'on considère que le champ de pesanteur est uniforme et donc ne s'annule jamais, même à l'infini ! Ce qui est faux bien entendu ! Tout comme le fait que la température reste la même à n'importe quelle altitude. Toutefois la statistique de Boltzmann permet bien retrouver d'une autre manière un résultat fourni par ce modèle un peu étrange. Donc le modèle est cohérent avec lui-même disons, même si il n'est pas vraiment cohérent avec la réalité physique (mais, ça, par définition, c'est le cas pour n'importe quel modèle, à des degrés plus ou moins importants suivant la complexité du modèle).

► Généralisation

À une température T , la probabilité d'observer un état d'énergie entre E et $E + dE$ est égale à probabilité $p(E)dE$, où $p(E) = A e^{-\frac{E}{k_B T}}$.

Le facteur $e^{-\frac{E}{k_B T}}$ est appelé **facteur de Boltzmann**.

- (R) La constante A se détermine par normalisation : $\int_{E_{min}}^{E_{max}} p(E)dE = 1$.



E
x



EXERCICES

DIFFICULTÉ DE L'EXERCICE (ANALYSE, «TECHNICITÉ», ...)

DURÉE DE L'EXERCICE

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

	Exercices					
	1	2	3	4	5	6
Établir un champ de pression grâce à l'équation locale de la statique des fluides	•	•		•		
Exploiter la loi de Pascal			•	•	•	•
Exprimer la résultante des forces de pression sur une surface					•	•

Exercice 1 Atmosphère isotherme avec champ de pesanteur variable



On choisit un axe Oz vertical orienté vers le haut, l'origine correspondant au sol terrestre.

- Donner l'expression du champ de pesanteur terrestre en fonction de l'altitude z , le rayon R_T de la Terre et g_0 , l'intensité du champ de pesanteur au niveau du sol.
- On note M la masse molaire de l'air. On considère que l'air atmosphérique est de température uniforme T_0 . On note P_0 et ρ_0 la pression et la masse volumique de l'air au niveau du sol. Déterminer l'expression de $P(z)$ en fonction des paramètres. Commenter.

Exercice 2 Pression et température au centre du soleil



Le Soleil est une étoile de masse $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg, de rayon $R_S = 7,0 \cdot 10^5$ km, constituée d'un gaz supposé parfait, essentiellement de l'hydrogène atomique de masse molaire $M = 1,0$ g.mol⁻¹, à la pression $P(r)$, à la température $T(r)$ dans un problème à symétrie sphérique.

On donne dans une base sphérique : $\overrightarrow{\text{grad}} f(r) = \frac{df}{dr} \vec{u}_r$.

On admet que l'intensité du champ gravitationnel d'un astre sur une surface r à l'intérieur de cet astre est de norme $g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$, où $M(r)$ est la masse comprise dans la sphère de rayon r .

En prenant pour modèle une masse volumique ρ_0 uniforme, déterminer $P(0)$ et $T(0)$.

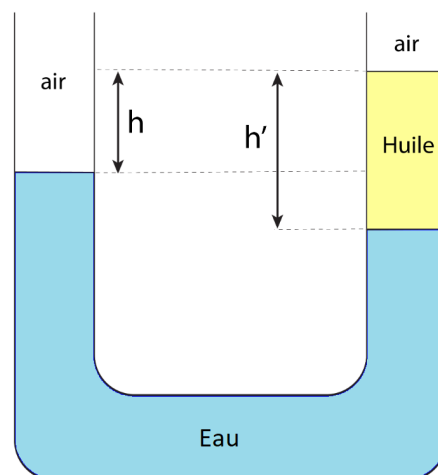
Exercice 3 Mesure d'une densité avec un tube en U



La densité d'un corps homogène est le rapport de sa masse volumique à celle ρ_e de l'eau.

On considère un tube en U de section $s = 1,0$ cm² rempli d'eau de masse volumique ρ_e . On ajoute un volume $V = 10,0$ cm³ d'huile de masse volumique ρ dans une des branches de tube. On note P_0 la pression de l'air ambiant.

- Quelle est la hauteur h' d'huile en fonction de V et s ?
- Établir une relation entre ρ_e , ρ , h et h' .
- On mesure $h = 1,0$ cm. En déduire la densité d de l'huile.





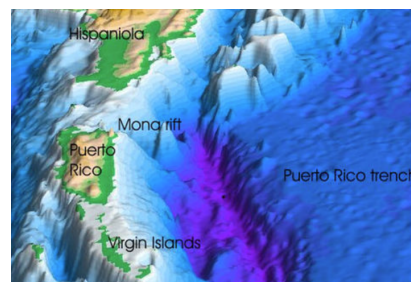
Exercice 4

Pression dans une fosse sous-marine



On considère une fosse sous-marine (*ci-contre, celle de Porto Rico*) de profondeur $H = 10$ km. La pression à la surface de l'eau est $P_0 = 1,013$ bar et on supposera la température uniforme et égale à $T_0 = 273$ K. La masse volumique de l'eau à la surface vaut $\rho_0 = 1,00.10^3$ kg.m⁻³. On choisira un axe Oz orienté vers le bas, l'origine correspondant à l'interface avec l'air.

- Calculer la pression $P(H)$ au fond de la fosse en supposant l'eau incompressible.



On veut désormais déterminer $P(H)$ en tenant compte de la compressibilité de l'eau. On doit donc considérer que la masse volumique ρ de l'eau dépend maintenant de la profondeur z . On notera ρ_0 la masse volumique de l'eau à la surface. On donne le coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = 4,90.10^{-10}$ Pa⁻¹ à 273 K.

- Puisque $T = T_0 = \text{constante}$, comment peut-on simplifier l'écriture de χ_T ? Montrer que $\chi_T = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP}$.
- Déterminer l'expression de $\frac{d\rho}{dz}$ à l'aide de l'équation locale de la statique des fluides.
- En déduire $\rho(z)$ et $P(z)$.
- Calculer $\rho(H)$ et $P(H)$. Commenter.

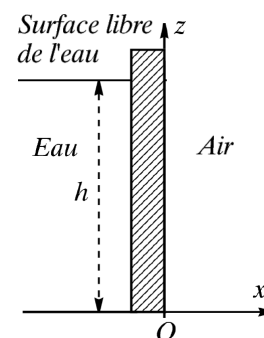
Exercice 5

Barrage



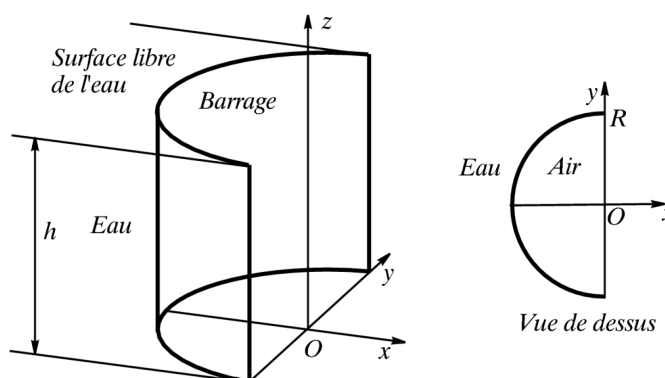
Un récipient contient de l'eau de masse volumique ρ . On s'intéresse aux efforts exercés par le fluide sur la paroi plane du récipient de surface $S = hL$. De l'autre côté de la paroi, la pression de l'air est P_0 .

- Quelle est la force de pression qui s'exerce sur un élément de paroi horizontal d'altitude z et d'épaisseur dz ?
- Quelle est la résultante des forces de pression exercée sur la paroi?



Désormais, la paroi n'est plus plane mais de forme hémicylindrique de rayon $R = \frac{L}{2}$.

- Quelle est la force de pression qui s'exerce sur un élément de paroi judicieusement choisi?
- Suivant quel vecteur unitaire est orienté la résultante des forces de pression? Justifier.
- En déduire la résultante des forces de pression exercée sur la paroi et comparer au barrage plan précédent.



Exercice 6

Soulèvement d'une cloche hémisphérique



Pour quelle hauteur d'eau h la cloche hémisphérique ci-contre de masse m et de rayon R se soulèvera-t-elle? On négligera l'épaisseur de la cloche.

